Algorithmen und Datenstrukturen

Hinweis: Bei den Übungsterminen der folgenden Woche (31. Januar–04. Februar) werden keine neuen Themen besprochen. Wir nutzen die Termine, um in Vorbereitung auf die Klausur Fragen zu den Themen der Lehrveranstaltung zu klären bzw. Themen zu wiederholen. Nutzen Sie die Klausuren vergangener Semester (in der Aufgabensammlung ab Seite 401, bzw. via ftp.ifsr.de) zur Vorbereitung auf die Prüfung.

Aufgabe 1 (AGS 10.5)

Bestimmen Sie für die folgenden Szenarien die Menge X der Ergebnisse und die Menge Y der Beobachtungen. Bestimmen Sie außerdem den Analysator.

(a) Werfen zweier unabhängiger Münzen. Sie können nur beobachten, ob beide Münzen dieselbe oder verschiedene Seiten zeigen.

(b) Werfen zweier Würfel, wobei Sie nur die Summe der Augenzahlen beobachten.

(c) Zwei Spieler spielen Schere-Stein-Papier. Sie beobachten lediglich, welcher Spieler gewonnen hat bzw. ob das Spiel unentschieden ausging.

Aufgabe 2 (AGS 10.11)

Bei einem Spiel werfen Sie zwei unabhängige Münzen und erhalten einen Gewinn, wenn nach dem Wurf beide Münzen *auf der gleichen Seite landen*. Sie können bei diesem Spiel nur beobachten, ob Sie gewonnen oder verloren haben. Nehmen Sie an, dass die erste Münze sehr dick ist und daher beim Werfen auch auf dem Rand (R) landen kann. Die Menge der möglichen Ergebnisse ist daher $X = \{Z, R, K\} \times \{Z, K\}$.

(a) Geben Sie den Analysator A für dieses Szenario an.

(b) Sie spielen das Spiel 24 Mal und gewinnen 6 Mal. Geben Sie den Korpus h mit unvollständigen Daten an.

(c) Gegeben ist die initiale Wahrscheinlichkeitsverteilung $q_0 = q_0^1 \times q_0^2$ über den vollständigen Daten, mit $q_0^1(K) = 2/5$, $q_0^1(R) = 1/5$ und $q_0^2(K) = 1/3$. Dabei ist q_0^1 die Wahrscheinlichkeitsverteilung der ersten und q_0^2 die der zweiten Münze. Führen Sie den E-Schritt des EM-Algorithmus aus, erweitern Sie also den Korpus h zum Korpus h_1 über den vollständigen Daten.

(d) Führen Sie nun den M-Schritt aus. Bestimmen Sie dafür zunächst die Teilkorpora h_1^1 und h_1^2 für die erste bzw. zweite Münze.

(e) Schätzen Sie nun die Wahrscheinlichkeitsverteilungen q_1^1 und q_1^2 der beiden Münzen, indem Sie die relative Häufigkeit der Teilkorpora bestimmen.

https://www.orchid.inf.tu-dresden.de thomas.ruprecht@tu-dresden.de

Zusatzaufgabe 1 (AGS 10.21 $\star$)

Bei einem Spiel werden zwei Zahlen x und y zufällig gezogen, wobei x einen Wert der Menge $\{1, 2\}$ und y einen Wert der Menge $\{1, 2, 3\}$ annehmen kann. In jeder Runde werden die Zahlen gezogen; Sie beobachten aber lediglich den Restbetrag der Division $(x \cdot y) \div 4$. Die Menge der möglichen Beobachtungen ist also $Y = \{0, 1, 2, 3\}$.

(a) Geben Sie den Analysator A für dieses Szenario an.

(b) Sie beobachten 100 Runden des Spiels und halten Ihre Beobachtungen im folgenden Korpus h mit unvollständigen Daten fest:

$$h(0) = 20 \qquad h(1) = 27$$
$$h(2) = 25 \qquad h(3) = 28$$

Wir wollen aus diesem Korpus h mit dem EM-Algorithmus die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der beiden Zufallszahlen bestimmen. Die initiale Wahrscheinlichkeitsverteilung $q_0 = q_0^1 \times q_0^2$ ist gegeben durch $q_0^1(1) = \frac{3}{5}$, $q_0^2(1) = \frac{3}{10}$ und $q_0^2(2) = \frac{1}{2}$. Dabei ist q_0^1 die Wahrscheinlichkeitsverteilung der 1. Zahl und q_0^2 die Wahrscheinlichkeitsverteilung der 2. Zahl. Geben Sie die Verbundwahrscheinlichkeit q_0 vollständig an!

Führen Sie den E-Schritt aus. Vervollständigen Sie also das Korpus h zum Korpus h_1.

(c) Führen Sie nun den M-Schritt aus. Bestimmen Sie dafür zunächst die Teilkorpora h_1^1 und h_1^2 für die erste bzw. zweite Zufallszahl. Schätzen Sie nun die Wahrscheinlichkeitsverteilungen q_1^1 und q_1^2 der beiden Zufallszahlen, indem Sie die relative Häufigkeit der Teilkorpora bestimmen.