

## Algorithmen und Datenstrukturen

---

### Aufgabe 1 (AGS 10.1)

- (a) Beschreiben Sie die folgenden Zufallsexperimente formal durch Angabe einer Ergebnismenge und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung:
1. Das Werfen von zwei fairen Würfeln.
  2. Das gleichzeitige Ziehen von jeweils einer Kugel aus zwei Urnen. Die erste Urne hat zwei weiße und drei schwarze Kugeln. Die zweite Urne hat eine rote, zwei blaue Kugeln und drei grüne Kugeln. Die Kugeln sind nicht unterscheidbar (abgesehen von ihrer Farbe).
  3. Das sechsmalige Werfen einer Münze, die mit Wahrscheinlichkeit 0,3 Kopf ergibt.
- (b) Geben Sie für die folgenden Szenarien jeweils die Ergebnismenge und das Wahrscheinlichkeitsmodell an. Bestimmen Sie ob das Wahrscheinlichkeitsmodell beschränkt oder unbeschränkt ist. Wenn das Modell beschränkt ist, dann geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung an, die sich nicht in dem Modell befindet.
1. Das Werfen eines Tetraeders mit beliebigen Eigenschaften.
  2. Das Werfen eines Würfels, bei dem alle Seiten mit gerader Augenzahl die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.
  3. Das zweimalige Werfen der gleichen Münze, diese darf beliebige Eigenschaften haben.

### Aufgabe 2 (AGS 10.3)

- (a) Sie haben zwei Würfel, davon ist einer fair und bei dem anderen ist jede der Seiten mit geraden Augenzahlen drei Mal so wahrscheinlich wie jede der Seiten mit ungeraden Augenzahlen. Sie wählen einen der beiden Würfel aus und erzeugen bei zehn Würfen das folgende Korpus:

$$h(1) = 1, \quad h(2) = 2, \quad h(3) = 2, \quad h(4) = 1, \quad h(5) = 1, \quad h(6) = 3.$$

Welchen Würfel haben Sie wahrscheinlich gegriffen?

- (b) Nehmen Sie an, dass Sie das Korpus  $h$  mit einem beliebigen Würfel erzeugt haben. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Würfels ab.

### Zusatzaufgabe 1 (AGS 10.7 \*)

Bei beschränkten Modellen kann der Maximum-Likelihood-Schätzer im Allgemeinen nicht effizient bestimmt werden. Beinhaltet das Modell  $\mathcal{M}$  aber die relative Häufigkeitsverteilung  $rfe(h)$  des gegebenen Korpus  $h$ , dann ist  $mle(\mathcal{M}, h) = rfe(h)$ , denn keine andere Wahrscheinlichkeitsverteilung erzeugt eine höhere Likelihood.

Bestimmen Sie für die folgenden Situationen das Wahrscheinlichkeitsmodell, zeigen Sie, dass die relative Häufigkeitsverteilung des betrachteten Korpus in diesem enthalten ist und bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer.

- (a) Werfen eines Würfels, bei dem gegenüberliegende Seiten die gleiche Wahrscheinlichkeit aufweisen. Betrachten Sie den folgenden Korpus:

$$h(1) = 3, \quad h(2) = 5, \quad h(3) = 1, \quad h(4) = 1, \quad h(5) = 5, \quad h(6) = 3.$$

- (b) Werfen zweier unabhängiger Münzen. Betrachten Sie das folgende Korpus:

$$h(K, K) = 2, \quad h(K, Z) = 4, \quad h(Z, K) = 4, \quad h(Z, Z) = 8.$$

- (c) Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit fünf Kugeln. Die Kugeln sind weiß, schwarz oder rot. Betrachten Sie das folgende Korpus:

$$h(W) = 4, \quad h(S) = 2, \quad h(R) = 4.$$