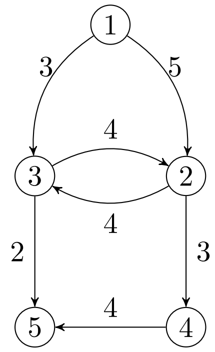
Algorithmen und Datenstrukturen

Aufgabe 1 (AGS 9.5.24, AGS 9.5.27 c)

Der nachfolgende gewichtete Graph G stellt ein Straßennetz mit Einbahnstraßen dar. Dabei besagt das Gewicht 5 der Kante $(1, 2)$ beispielsweise, dass die Strecke vom ersten zum zweiten Knoten für Fahrzeuge mit einer Breite von maximal 5m passierbar ist. Es soll für jedes Knotenpaar (a, b) die maximale Fahrzeugbreite berechnet werden, um von a nach b zu gelangen.



(a) Geben Sie den entsprechenden Semiring an.

(b) Geben Sie die modifizierte Adjazenzmatrix an.

(c) Aus der Update-Formel des Aho-Algorithmus kennen Sie den Ausdruck

$$D_G^{(k-1)}(u,v) \oplus \left(D_G^{(k-1)}(u,k) \odot \left(D_G^{(k-1)}(k,k)\right)^* \odot D_G^{(k-1)}(k,v) \right).$$

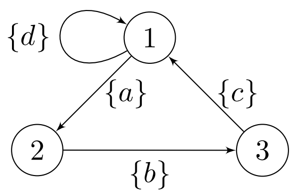
Vereinfachen Sie diesen Ausdruck für den Semiring aus Augabenteil (a), indem Sie a^* für ein beliebiges Element $a \in S$ ausrechnen.

(d) Berechnen Sie mit dem Aho-Algorithmus die Matrizen $D_G^{(i)}$, $i \in \{1, \dots, 5\}$. Notieren Sie nur Matrixelemente, die sich gegenüber der jeweiligen Vorgängermatrix geändert haben.

(e) Wegen Reparaturarbeiten auf der Strecke von Knoten 4 zu 5 sinkt die maximal zulässige Fahrzeugbreite auf 1m. Wie ändert sich $D_G(1, 5)$? Geben Sie den zugehörigen Pfad an.

Aufgabe 2 (AGS 9.5.29)

Der folgende Graph G stellt ein Prozessdiagramm dar.



(a) Geben Sie den entsprechenden Semiring an. Sie dürfen die Abkürzung $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ verwenden.

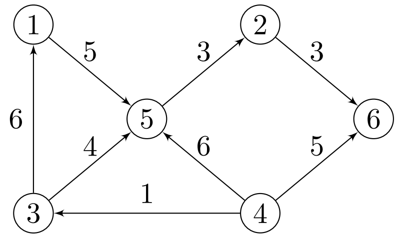
(b) Geben Sie die modifizierte Adjazenzmatrix an.

(c) Berechnen Sie mit dem Aho-Algorithmus die Matrix $D_G^{(1)}$.

(d) Geben Sie nun die Werte $D_G^{(2)}(3, 3)$ sowie $D_G^{(3)}(3, 3)$ an.

Zusatzaufgabe 1 (AGS 9.5.31 $\star$)

Gegeben sei folgender Graph G für ein kürzeste-Wege-Problem:



(a) Geben Sie den entsprechenden Semiring an.

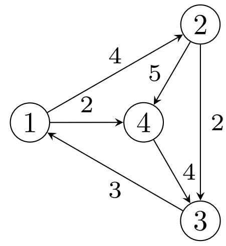
(b) Geben Sie die modifizierte Adjazenzmatrix an.

(c) Für welche i gilt $D_G^{(i)} = D_G^{(i-1)}$? Begründen Sie jeweils.

(d) Geben Sie $D_G^{(4)}$ an.

(e) Geben Sie die Werte $D_G(1, 2)$, $D_G(1, 6)$, $D_G(3, 2)$, $D_G(3, 6)$, sowie $D_G(4, 2)$ an.

Zusatzaufgabe 2 (9.5.33 $\star$)



Der Graph G stellt das Schienennetz einer Stadt dar, wobei jeder Streckenabschnitt nur in eine Richtung befahren werden darf. Aufgrund vieler Brücken dürfen die Züge nicht beliebig hoch sein: die Zahl an jeder Kante steht für die erlaubte Zughöhe auf dem Streckenabschnitt. Für jedes Knotenpaar (u, v) soll die maximale Höhe eines Zuges ermittelt werden, der vom Knoten u zum Knoten v verkehren darf.

(a) Um welches Pfadproblem handelt es sich? Nennen Sie den Namen des Problems und geben Sie den zugehörigen Semiring an.

(b) Geben Sie die modifizierte Adjazenzmatrix von G vollständig an.

(c) Die Matrix $D_G^{(2)}$ ist gegeben. Geben Sie die Matrizen $D_G^{(3)}$ und $D_G^{(4)}$ an!

$$D_G^{(2)} = \begin{pmatrix} \infty & 4 & 2 & 4 \\ 0 & \infty & 2 & 5 \\ 3 & 3 & \infty & 3 \\ 0 & 0 & 4 & \infty \end{pmatrix}$$

(d) Wie hoch darf ein Zug maximal sein, um zwischen beliebigen Knotenpaaren verkehren zu können?