

# Programmierung

*Hinweis:* In den Aufgaben dürfen Sie die folgenden Terme und Beziehungen nutzen:

$$\begin{array}{ll}
 \langle n \rangle & \text{für } n \geq 0 \\
 \langle succ \rangle \langle n \rangle \Rightarrow^* \langle n + 1 \rangle & \\
 \langle pred \rangle \langle n \rangle \Rightarrow^* \langle n - 1 \rangle & \text{für } n > 0 \\
 \langle add \rangle \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle \Rightarrow^* \langle n_1 + n_2 \rangle & \\
 \langle mult \rangle \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle \Rightarrow^* \langle n_1 \cdot n_2 \rangle & \\
 \langle Y \rangle = (\lambda z. ((\lambda u. z(uu))(\lambda u. z(uu)))) & \\
 \langle sub \rangle \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle \Rightarrow^* \begin{cases} \langle n_1 - n_2 \rangle, & \text{wenn } n_1 \geq n_2 \\ \langle 0 \rangle & \text{sonst} \end{cases} & \\
 \langle iszero \rangle s \Rightarrow^* \begin{cases} \langle true \rangle, & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle 0 \rangle \\ \langle false \rangle & \text{sonst} \end{cases} & \\
 \langle ite \rangle s s_1 s_2 \Rightarrow^* \begin{cases} s_1, & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle true \rangle \\ s_2 & \text{sonst} \end{cases} &
 \end{array}$$

## Aufgabe 1 (AGS 12.4.32)

- (a) Berechnen Sie die Normalform des  $\lambda$ -Terms  $(\lambda f x. f f x) (\lambda y. x) z$ , indem Sie ihn *schrittweise* reduzieren. Geben Sie dabei vor jedem Schritt für die relevanten Teilausdrücke die Mengen der gebunden bzw. frei vorkommenden Variablen an.
- (b) Gegeben sei der  $\lambda$ -Term

$$\langle F \rangle = \left( \lambda f x y z. \langle ite \rangle (\langle iszero \rangle (\langle sub \rangle x y)) (\langle add \rangle y z) \right. \\
 \left. \left( \langle succ \rangle (f (\langle pred \rangle x)) (\langle succ \rangle y) (\langle mult \rangle \langle 2 \rangle z) \right) \right).$$

Berechnen Sie schrittweise die Normalform des Terms  $\langle Y \rangle \langle F \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle$ . Schreiben Sie für jeden Aufruf von  $\langle F \rangle$  jeweils zwei Zeilen: eine in der Sie die Werte der Parameter des Aufrufs protokollieren, und eine in der Sie ihre Auswertung skizzieren. Falls angebracht, führen Sie im Rechenprozess zweckmäßige Abkürzungen der  $\lambda$ -Terme ein.

- (c) Gegeben sei die folgende Haskell-Funktion:

```

g :: Int -> Int -> Int
g 0 y = 2 * (y + 1)
g x 0 = 2 * (x + 1)
g x y = 4 + g (x - 1) (y - 1)

```

Geben Sie einen  $\lambda$ -Term  $\langle G \rangle$  an, so dass  $\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle x \rangle \langle y \rangle \Rightarrow^* \langle g x y \rangle$  für alle  $x, y \in \mathbb{N}$  gilt.

## Aufgabe 2 (AGS 12.4.21)

- (a) Eine Funktion  $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sei wie folgt definiert:

$$\begin{array}{ll}
 g(x, y) = x \cdot x & \text{für } y = 0 \\
 g(x, y) = g(2 \cdot x, y - 1) & \text{für } y \geq 1
 \end{array}$$

Geben Sie zur Funktion  $g$  den zugehörigen  $\lambda$ -Term  $\langle G \rangle$  an, so dass  $\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle x \rangle \langle y \rangle \Rightarrow^* \langle g(x, y) \rangle$  für alle  $x, y \in \mathbb{N}$  gilt.

- (b) Berechnen Sie für den in Aufgabe 2(a) definierten  $\lambda$ -Term  $\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle$ .

### Zusatzaufgabe 1 (AGS 12.4.41 ★)

(a) Gegeben sei der  $\lambda$ -Term  $(\lambda f y. y f)((\lambda x. x y)(\lambda z. y))$ . Berechnen Sie die Normalform dieses Terms, indem Sie ihn *schrittweise* reduzieren. Geben Sie dabei vor jedem Schritt für die relevanten Teilausdrücke die Mengen der gebunden bzw. frei vorkommenden Variablen an.

(b) Gegeben sei die folgende Haskell-Funktion:

```
f :: Int -> Int -> Int
f x 0 = x
f 0 y = f 1 (y - 1)
f x y = f (f (x - 1) y) (y - 1)
```

Geben Sie einen  $\lambda$ -Term  $\langle F \rangle$  an, so dass  $\langle Y \rangle \langle F \rangle \langle x \rangle \langle y \rangle \Rightarrow^* \langle f \ x \ y \rangle$  für alle  $x, y \in \mathbb{N}$  gilt. Sie dürfen dabei die am Ende der Aufgabenstellung gegebenen Terme nutzen.

(c) Gegeben sei der  $\lambda$ -Term

$$\langle G \rangle = \left( \lambda g m n. \langle ite \rangle (\langle iszero \rangle m) n (g (\langle pred \rangle m) (\langle succ \rangle n)) \right).$$

Berechnen Sie schrittweise die Normalform des Terms  $\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle 1 \rangle \langle 5 \rangle$ .

Stellen Sie zuerst die Wirkungsweise des Fixpunktkombinators  $\langle Y \rangle$  in einer Nebenrechnung dar. Führen Sie, wenn notwendig, im Rechenprozess zweckmäßige Abkürzungen der  $\lambda$ -Terme ein.