7. Übung (18.–22. Mai 2020)

Programmierung

Hinweis: In den Aufgaben dürfen Sie die folgenden Terme und Beziehungen nutzen:

$$\langle n \rangle \quad \text{für } n \geq 0$$

$$\langle pred\rangle\langle n\rangle \Rightarrow^* \langle n-1\rangle \quad \text{für } n > 0$$

$$\langle succ\rangle\langle n\rangle \Rightarrow^* \langle n+1\rangle \quad \text{für } n \geq 0$$

$$\langle add\rangle\langle n_1\rangle\langle n_2\rangle \Rightarrow^* \langle n_1+n_2\rangle$$

$$\langle mult\rangle\langle n_1\rangle\langle n_2\rangle \Rightarrow^* \langle n_1\cdot n_2\rangle$$

$$\langle ite\rangle\ s\ s_1\ s_2 \Rightarrow^* \begin{cases} s_1\ , & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle true\rangle \\ s_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\langle iszero\rangle\ s \Rightarrow^* \begin{cases} \langle true\rangle\ , & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle 0\rangle \\ \langle false\rangle & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\langle \mathrm{sub}\rangle\langle n_1\rangle\langle n_2\rangle \Rightarrow^* \begin{cases} \langle n_1-n_2\rangle\ , & \text{wenn } n_1 \geq n_2 \\ \langle 0\rangle & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\langle Y\rangle = (\lambda z.((\lambda u.z(uu))(\lambda u.z(uu))))$$

$$\langle mod\rangle\langle n_1\rangle\langle n_2\rangle \Rightarrow^* \langle z\rangle \quad \text{für } 0 \leq z < n_2, \text{ sodass } n_1 \equiv z \pmod{n_2}$$

Aufgabe 1 (AGS 12.4.32)

(a) Berechnen Sie die Normalform des λ-Terms $(\lambda fx.\, f\, f\, x)\ (\lambda y.\, x)\ z$, indem Sie ihn *schrittweise* reduzieren. Geben Sie dabei vor jedem Schritt für die relevanten Teilausdrücke die Mengen der gebunden bzw. frei vorkommenden Variablen an.

(b) Gegeben sei der λ-Term

$$\langle F\rangle = \Big(\lambda fxyz.\langle ite\rangle\ (\langle iszero\rangle\ (\langle sub\rangle\, x\, y))\ (\langle add\rangle\, y\, z) \\ \Big(\langle succ\rangle\ \big(f\,(\langle pred\rangle\, x)\,(\langle succ\rangle\, y)\,(\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ z)\big)\Big)\Big)\ .$$

Berechnen Sie schrittweise die Normalform des Terms $\langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle$. Schreiben Sie für jeden Aufruf von $\langle F\rangle$ jeweils zwei Zeilen: eine in der Sie die Werte der Parameter des Aufrufs protokollieren, und eine in der Sie ihre Auswertung skizzieren. Falls angebracht, führen Sie im Rechenprozess zweckmäßige Abkürzungen der λ-Terme ein.

(c) Gegeben sei die folgende Haskell-Funktion:

```
g :: Int -> Int -> Int
g 0 y = 2 * (y + 1)
g x 0 = 2 * (x + 1)
g x y = 4 + g (x - 1) (y - 1)
```

Geben Sie einen λ-Term $\langle G\rangle$ an, so dass $\langle Y\rangle\langle G\rangle\langle x\rangle\langle y\rangle \Rightarrow^* \langle \mathtt{g}\ x\ y\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2 (AGS 12.4.21)

(a) Eine Funktion $g\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= x \cdot x && \text{für } y = 0 \\ g(x,y) &= g(2 \cdot x, y-1) && \text{für } y \geq 1 \end{aligned}$$

Geben Sie zur Funktion g den zugehörigen λ-Term $\langle G \rangle$ an, so dass $\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle x \rangle \langle y \rangle \Rightarrow^* \langle g(x,y) \rangle$ füe alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Berechnen Sie für den in Aufgabe 2 (a) definierten λ-Term $\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle$.

Zusatzaufgabe 1 (AGS 12.4.36)

Gegeben sei der λ-Term $\langle pow \rangle = \Big(\lambda nfz.\, n\, (\lambda gx.\, g\, (g\, x))\, f\, z\Big)$.

(a) Berechnen Sie die Normalform von $\langle pow \rangle\ \langle 2 \rangle$. Sie dürfen Zwischenschritte weglassen.

(b) Welche mathematische Funktion berechnet $\langle pow \rangle$?

(c) *Zusatzaufgabe:* Verallgemeinern Sie $\langle pow \rangle$.

Zusatzaufgabe 2 (AGS 12.4.27)

(a) Berechnen Sie die Normalform des untenstehenden λ-Terms, indem Sie ihn *schrittweise* reduzieren. Geben Sie dabei vor jedem Schritt für die relevanten Teilausdrücke die Mengen der gebunden bzw. frei vorkommenden Variablen an.

$$(\lambda xyz.\, y\, z\, x)\, (\lambda x.\, x\, y)\, (\lambda x.\, x)$$

(b) Gegeben sei die folgende Haskell-Funktion:

```
g :: Int -> Int -> Int -> Int
g 0 _ _ = 0
g n x y = (g (n - 1) x y) + (if n `mod` 2 == 0 then x else y)
```

Geben Sie einen λ-Term $\langle G \rangle$ an, so dass $\langle \texttt{g n x y} \rangle = \langle Y \rangle \langle G \rangle \langle \texttt{n} \rangle \langle \texttt{x} \rangle \langle \texttt{y} \rangle$ für alle $\texttt{n}, \texttt{x}, \texttt{y} \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Gegeben sei der λ-Term

$$\begin{aligned} \langle F \rangle = \lambda fnxy.\, \langle ite \rangle & (\langle iszero \rangle\, (\langle pred \rangle\, n)) \\ & (\langle add \rangle\, x\, y) \\ & (f\, (\langle pred \rangle\, n)\, (\langle mult \rangle\, x\, n)\, (\langle add \rangle\, y\, n))\,. \end{aligned}$$

Berechnen Sie schrittweise die Normalform des Terms $\langle Y \rangle \langle F \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 5 \rangle$. Führen Sie im Rechenprozess zweckmäßige Abkürzungen der λ-Terme ein.