Programmierung

08. Übungsblatt

Zeitraum: 15. – 19. Juni 2015

Übung 1 (AGS 12.4.28)

(a) Berechnen Sie die Normalform des untenstehenden λ-Terms, indem Sie ihn *schrittweise* reduzieren. Geben Sie dabei vor jedem Schritt für die relevanten Teilausdrücke die Mengen der gebunden bzw. frei vorkommenden Variablen an.

$$(\lambda xy.\, y\, x)\big((\lambda x.\, x\, y)(\lambda z.\, y)\big)$$

(b) Gegeben sei die folgende Haskell-Funktion:

```
g :: Int -> Int -> Int
g x 0 = x
g 0 y = g 1 (y-1)
g x y = g (g (x-1) y) (y-1)
```

Geben Sie einen λ-Term $\langle G\rangle$ an, so dass $\mathtt{g} = \langle Y\rangle\langle G\rangle$ gilt.

(c) Gegeben sei der λ-Term

$$\begin{aligned}\langle F\rangle = \lambda f\,xyz.\, \langle ite\rangle &\big(\langle iszero\rangle\,(\langle sub\rangle\, x\, y)\big)\\ &(\langle add\rangle\, z\, \langle 4\rangle)\\ &\big(f\; y\,(\langle mult\rangle\; yz)(\langle add\rangle\; x\; y)\big).\end{aligned}$$

Berechnen Sie schrittweise die Normalform des Terms $\langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle\langle 1\rangle$. Führen Sie im Rechenprozess zweckmäßige Abkürzungen der λ-Terme ein.

Übung 2 (AGS 12.4.26)

(a) Berechnen Sie die Normalform des untenstehenden λ-Terms, indem Sie ihn *schrittweise* reduzieren. Geben Sie dabei vor jedem Schritt für die relevanten Teilausdrücke die Mengen der gebunden bzw. frei vorkommenden Variablen an.

$$(\lambda xy.y(\lambda x.x))(y(\lambda x.x))z$$

(b) Gegeben seien der λ-Term

$$\begin{aligned}\langle G\rangle = (\lambda gxy.\langle ite\rangle(\langle iszero\rangle x\ )\ y\\ &(\langle ite\rangle(\langle iszero\rangle(\langle pred\rangle x))\ (\langle mult\rangle\langle 2\rangle y)(\langle mult\rangle(g\ (\langle pred\rangle x\ )\ y)\\ &(g\ (\langle pred\rangle(\langle pred\rangle x))\ (\langle succ\rangle y)))))\end{aligned}$$

und der Fixpunktkombinator $\langle Y\rangle = \big(\lambda.z\big((\lambda u.z(uu))(\lambda u.z(uu))\big)\big)$. Geben Sie die durch $\langle Y\rangle\langle G\rangle$ beschriebene rekursive Funktion als Haskell-Funktion $\mathtt{g}$ an.

(c) Gegeben sei der λ-Term

$$\langle F\rangle = (\lambda f\,xyz.\langle ite\rangle(\langle iszero\rangle\ y)\ (\langle add\rangle\ x\ x)\ (\langle mult\rangle\ z\ (\ f\ (\langle succ\rangle x)\ (\langle pred\rangle y\ )\ z)))$$

Berechnen Sie die Normalform des Terms $\langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 4\rangle\langle 1\rangle\langle 2\rangle$ unter Angabe geeigneter Zwischenschritte. Führen Sie im Rechenprozess zweckmäßige Abkürzungen der λ-Terme ein.

Übung 3 (AGS 13.13 (b))

Gegeben sei folgender AM_0-Code:

```
1: READ 1;      4: GT;        7: LIT 2;      10: WRITE 1;
2: LOAD 1;      5: JMC 12;    8: DIV;        11: JMP 2;
3: LIT 1;       6: LOAD 1;    9: STORE 1;
```

Erstellen Sie ein schrittweises Ablaufprotokoll der AM_0 für dieses Programm. Die Startkonfiguration ist $(1, \varepsilon, [\,], 2, \varepsilon)$. Sie müssen nur Zellen ausfüllen, deren Wert sich im Vergleich zur jeweils vorherigen Zeile geändert hat.

Zusatzaufgabe 1 (AGS 13.10)

Folgendes AM_0-Programm sei gegeben:

```
1: READ 1        6: SUB
2: READ 2        7: JMC 9
3: LOAD 1        8: JMP 5
4: LOAD 2        9: WRITE 2
5: LIT  0
```

Protokollieren Sie den schrittweisen Ablauf dieses Programms auf der AM_0 mit der Anfangskonfiguration $(1, \varepsilon, [\ \ ], 0 : 1, \varepsilon)$.

Zusatzaufgabe 2 (AGS 12.4.16)

(a) Gegeben sei folgender λ–Term:

$$(\lambda x y.y\ (\lambda x.x)\ x\ )(y\ (\lambda y.y))$$

Reduzieren Sie diesen Term bis seine Normalform erreicht ist. Schreiben Sie – bevor Sie einen Ableitungsschritt ausführen – für die relevanten (Teil-)Ausdrücke die Mengen der freien bzw. der gebundenen Vorkommen von Variablen auf.

(b) Gegeben sei der λ-Term:

$$\langle G\rangle = \big(\lambda f x y z.\langle ite\rangle\big(\langle iszero\rangle(\langle mult\rangle x\ y)\big)\ (\langle add\rangle x\ z)\big(f\ (\langle succ\rangle x)\ (\langle pred\rangle y)\ (\langle succ\rangle z)\big)\big)$$

Berechnen Sie schrittweise $\langle Y\rangle\langle G\rangle\langle 4\rangle\langle 1\rangle\langle 5\rangle$. Führen Sie im Rechenprozess zweckmäßige Abkürzungen der λ-Terme ein.

(c) Eine Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ sei wie folgt definiert:

$$f(x,y) = \begin{cases} y\ , & \text{wenn } x = 0\ , \\ y * y\ , & \text{wenn } x = 1\ , \\ 2 + f(x-1, y+1) * f(x-2, y)\ , & \text{wenn } x \geq 2\ . \end{cases}$$

Geben Sie zur Funktion f den zugehörigen λ-Term $\langle F\rangle$ an, so dass $\langle f\rangle = \langle Y\rangle\langle F\rangle$ gilt.