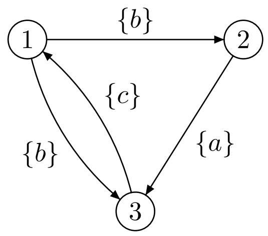
Algorithmen und Datenstrukturen

14. Übungsblatt

Zeitraum: 02. – 06. Januar 2015

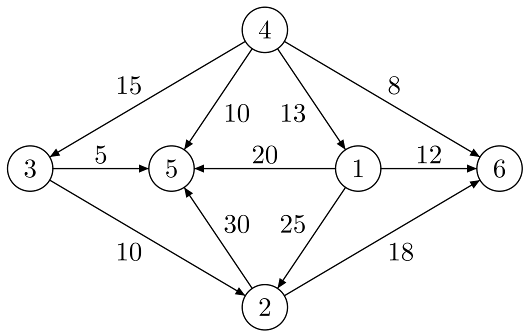
Übung 1 (AGS 9.4.19)
Der gewichtete Graph $G = (V, E, c)$ über dem Semiring $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}^*), \cup, \circ, \emptyset, \{\varepsilon\})$ sei durch folgende graphische Darstellung gegeben:



Es soll für den Graph G das Prozessproblem mit Hilfe des Aho-Algorithmus gelöst werden.

(a) Geben Sie für G die modifizierte Adjazenzmatrix mA_G an.
(b) Berechnen Sie für den Aho-Algorithmus die Matrizen $D_G^{(1)}$ und $D_G^{(2)}$. Schreiben Sie hierbei nur die Matrixelemente auf, die sich gegenüber mA_G geändert haben. Nutzen Sie dafür die Notation (i, j, L) mit $i \ldots$ Anfangsknoten, $j \ldots$ Endknoten und $L \ldots$ Sprache.
(c) Geben Sie die letzte Zeile der Ergebnismatrix D_G des Aho-Algorithmus an.
(d) Wie verändert sich der Eintrag $D_G(3, 3)$, wenn zu dem Graphen G eine Kante von Knoten 3 zum Knoten 2 mit dem Gewicht $\{b\}$ zugefügt wird?

Übung 2 (AGS 9.4.18)
Der gewichtete Graph $G = (V, E, c)$ über dem Semiring $(\mathbb{N}_\infty, \max, \min, 0, \infty)$ sei durch folgende graphische Darstellung gegeben:



Es soll für den Graph G das Kapazitätsproblem mit Hilfe des Aho-Algorithmus gelöst werden.

(a) Geben Sie für G die modifizierte Adjazenzmatrix mA_G an.
(b) Berechnen Sie mit dem Aho-Algorithmus die Matrizen $D_G^{(1)}$ und $D_G^{(2)}$. Schreiben Sie hierbei nur die Matrixelemente auf, die sich gegenüber mA_G geändert haben. Nutzen Sie dafür die Notation (i, j, k) mit i=Anfangsknoten, j=Endknoten und k=Gewicht.
(c) Geben Sie die *ersten drei* Zeilen der Ergebnismatrix D_G des Aho-Algorithmus an. Zwischenschritte bei der Berechnung brauchen Sie nicht anzugeben.

Übung 3 (AGS 10.10)

Bei einem Spiel werfen Sie zwei unabhängige Münzen und erhalten einen Gewinn, wenn nach dem Wurf beide Münzen Zahl zeigen. Sie können bei diesem Spiel nur beobachten, ob Sie gewonnen oder verloren haben.

(a) Bezeichne Z_1 (bzw. M_1) das Ereignis "Die erste Münze zeigt Zahl" (bzw. Kopf), analog für Z_2 und M_2. Geben Sie die Ergebnismenge X an!

(b) Geben Sie den Analysator A (A(Gewinn) und A(kein Gewinn)) für folgendes Szenario an: Sie spielen das Spiel 30 Mal und gewinnen 10 Mal. Geben sie den Korpus h über den unvollständigen Daten "Gewinn" und "Kein Gewinn" an.

(c) Gegeben ist die initiale Wahrscheinlichkeitsverteilung q_0 über den vollständigen Daten, mit $q_0(Z_1) = 1/2$ und $q_0(Z_2) = 2/3$. Bestimmen Sie daraus erst den Wert von $q_0(x)$ für jedes $x \in X$. Führen Sie dann den E-Schritt des EM-Algorithmus aus, erweitern Sie also den Korpus h zum Korpus h_1 über den vollständigen Daten.

(d) Führen Sie nun den M-Schritt aus. Bestimmen Sie dazu zunächst die Teilkorpora h_1^1 und h_1^2 für die erste bzw. die zweite Münze!
Schätzen Sie danach die Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_1 und p_2 der beiden Münzen, indem Sie die relative Häufigkeit der Teilkorpora bestimmen.

Übung 4 (AGS 10.14)

Die Personen A und B spielen ein Spiel. In jeder Runde werden zwei Zufallszahlen x und y bestimmt, wobei x Werte aus der Menge $\{1,2\}$ und y aus $\{1,2,3\}$ annehmen kann. Der Spieler A gewinnt die Runde, falls die Summe $x+y$ eine ungerade Zahl ist. Ansonsten gewinnt B die Runde. Die Menge der möglichen Ergebnisse ist somit $X = \{1,2\} \times \{1,2,3\}$.

(a) Geben Sie den Analysator A für dieses Szenario an, also A(„A gewinnt“) und A(„B gewinnt“). Die Spieler spielen 87 Runden des Spiels und A gewinnt dabei 60 Mal. Geben Sie den Korpus h mit unvollständigen Daten an, den sie erzeugen, also h(„A gewinnt“)und h(„B gewinnt“).

(b) Wir wollen aus diesem Korpus h mit dem EM-Algorithmus die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der beiden Zufallszahlen bestimmen. Die initiale Wahrscheinlichkeitsverteilung $q_0 = q_0^x \times q_0^y$ ist gegeben durch $q_0^x(1) = 2/3$ und $q_0^y(1) = q_0^y(2) = 1/5$. Dabei ist q_0^x die Wahrscheinlichkeitsverteilung von x und q_0^y die von y. Bestimmen Sie die Werte $q_0(i,j)$ für $1 \leq i \leq 2$ und $1 \leq j \leq 3$. Hinweis: $q_0(2,3) = 1/5$.
Führen Sie den E-Schritt aus, vervollständigen Sie also den Korpus h zum Korpus h_1. Geben Sie für alle $1 \leq i \leq 2$ und $1 \leq j \leq 3$ die Werte $h_1(i,j)$ an. Hinweis: $h_1(2,3) = 30$.

(c) Führen Sie nun den M-Schritt aus. Bestimmen Sie dafür zunächst die Teilkorpora h_1^x und h_1^y für x bzw. y. Geben Sie also für alle $1 \leq i \leq 2$ und $1 \leq j \leq 3$ die Werte $h_1^x(i)$ bzw. $h_1^y(j)$ an.
Schätzen Sie nun die Wahrscheinlichkeitsverteilungen q_1^x sowie q_1^y von x bzw. y, indem Sie die relative Häufigkeit der Teilkorpora bestimmen. Geben Sie dafür wieder für alle $1 \leq i \leq 2$ und $1 \leq j \leq 3$ die Werte $q_1^x(i)$ bzw. $q_1^y(j)$ an.

Zusatzaufgabe 1 (AGS 4.9 ⋆)

Gegeben sei das folgende C-Programm:

```
#include <stdio.h>

void f (int *a, int *b);

void g (int *x, int *y) {
  int z;
  z = *y;            /*label 1*/
  if (z > 0)
```

```
    f(&z, y); /* $1 */
  else
    *x = z;
  /*label 2*/
}

void f (int *a, int *b) {
  *b = *a - 1;       /*label 3*/
  while (*a > 1) {
    g(a, b); /* $2 */ /*label 4*/
  }
}

int main ()
{
  int e, a;|
  scanf("%i", &e);    /*label 5*/
  f(&e, &a); /* $3 */ /*label 6*/
  printf("%d", a);|\\
  return 0;
}
```

Erstellen Sie ein Speicherbelegungsprotokoll für das angegebene Programm für die Eingabe `e=2`. Dokumentieren Sie die aktuelle Situation beim Passieren der Haltepunkte (*label1* bis *label6*). Geben Sie jeweils den Rücksprungmarkenkeller und die *sichtbaren* Variablen mit ihrer Wertebelegung an. Die Inhalte von Speicherzellen nicht-sichtbarer Variablen sollen Sie nur bei Änderungen eintragen. Beachten Sie: *$1* bis *$3* seien die bereits festgelegten Rücksprungmarken.

Zusatzaufgabe 2 (AGS 9.4.5)
Ein gerichteter, kantenbewerteter Graph H ist gegeben durch

$$(1,2,40),(1,5,20),(4,1,30),(2,3,45),(3,4,35),(6,3,25),(4,6,30),(5,4,15),(4,7,40)\,,$$

mit dem Format (Anfangsknoten, Endknoten, Kapazität der Kante).

(a) Geben Sie eine grafische Darstellung, den zugehörigen Semiring des Kapazitätsproblems sowie die modifizierte Adjazenzmatrix des Graphen H an!

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Aho-Algorithmus die Matrix D_H dieses Kapazitätsproblems! Sollten sich bei einem Rekursionsschritt nur wenige Einträge der Matrix ändern, so brauchen Sie nur die geänderten Elemente anzugeben.

(c) Geben Sie die Erreichbarkeitsmatrix (abgekürzt E_H) des Graphen H an! Welcher Zusammenhang besteht zwischen D_H und E_H? Geben Sie eine Funktion an, die diesen Zusammenhang wiedergibt!