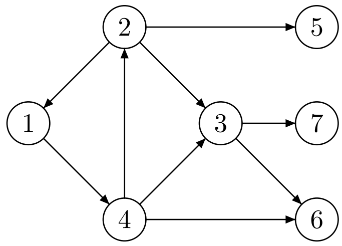
Algorithmen und Datenstrukturen

12. Übungsblatt

Zeitraum: 19. – 23. Januar 2015

Übung 1 (AGS 9.2.8)

Der gerichtete Graph $G = (V, E)$ sei durch folgende Darstellung gegeben:

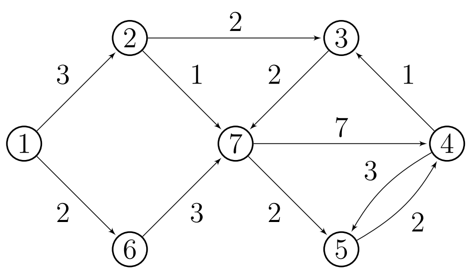


(a) Wenden Sie auf den Graphen G den DFS-Algorithmus mit dem Startknoten 1 an, und bestimmen Sie auf diese Weise einen depth-first tree. Geben Sie drei unterschiedliche Lösungen an. Zwischenschritte zu den Lösungen brauchen Sie nicht anzugeben.

(b) Transformieren Sie G in den ungerichteten Graphen $G' = (V', E')$, indem Sie $V' = V$ setzen und E' nach der Vorschrift $E' = E \cup \{(j, i) \mid (i, j) \in E\}$ erzeugen. Wenden Sie nun auf G' den BFS-Algorithmus mit dem Startknoten 1 an, und bestimmen Sie einen breadth-first-tree. Geben Sie hier zwei unterschiedliche Lösungen an. Zwischenschritte zu den Lösungen brauchen Sie nicht anzugeben.

Übung 2 (AGS 9.5.12)

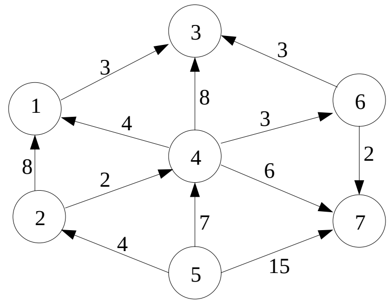
Der kantenbewertete Graph G sei durch folgende graphische Darstellung gegeben:



(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus die minimalen Entfernungen vom Knoten mit der Nummer 1 zu allen erreichbaren Knoten. Protokollieren Sie schrittweise die aktuelle Randknotenmenge und den zugehörigen Auswahlknoten. Geben Sie abschließend für alle berechneten kürzesten Wege die Entfernung und die jeweils zu durchlaufende Knotenfolge (Pfadtabelle) an.

(b) Welches ist das kleinste Gewicht, das man der Kante $(7, 4)$ zuweisen könnte, ohne dass sich die unter (a) berechneten minimalen Entfernungen ändern?

Übung 3 (AGS 9.3.4)
Der kantenbewertete Graph $G = (V, E)$ sei durch folgende graphische Darstellung gegeben:

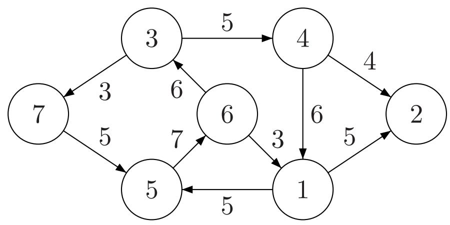


(a) Geben Sie für G die modifizierte Adjazenzmatrix mA_G an.

(b) Geben Sie die durch den Floyd-Warshall-Algorithmus berechneten Matrizen $D_G^{(i)}$, $1 \leq i \leq 7$, an.
Sie müssen dabei nur die Matrixelemente aufschreiben, die sich gegenüber mA_G geändert haben. Benutzen Sie dafür die Notation: (i, j, k) mit i = Anfangsknoten, j = Endknoten, k = Entfernung. *Tipp:* Manche dieser Matrizen können in unserem Beispiel zu keiner Verbesserung der minimalen Entfernungen führen. Wieso?

(c) Geben Sie die Ergebnismatrix D_G des Floyd-Warshall-Algorithmus an.

Übung 4 (AGS 9.4.2 ⋆)
Der Graph G stellt das Stollensystem in einem Bergwerk dar. Die Zahlen an den Kanten sind die Breiten der Stollen. Aus Sicherheitsgründen sind alle Stollen Einbahnstraßen. Nur über Knoten 7 kann das Stollensystem betreten und nur über Knoten 2 wieder verlassen werden.

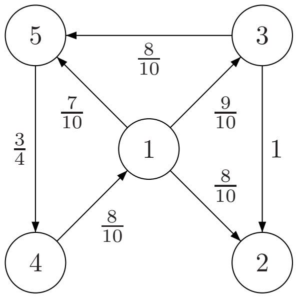


(a) Es sollen nun die maximalen Breiten für Fahrzeuge berechnet werden, die zwischen beliebigen Knotenpaaren verkehren können. Um welches Pfadproblem handelt es sich? Geben Sie die modifizierte Adjanzenzmatrix mA_G an!

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Aho-Algorithmus die Matrizen $D_G^{(i)}$ für $0 \leq i \leq 7$. Schreiben Sie hierbei (außer bei $D_G^{(0)}$ und $D_G = D_G^{(7)}$) jeweils nur die Matrixelemente auf, die sich gegenüber der vorherigen Matrix geändert haben, und benutzen Sie dafür die Notation: (i, j, k) mit i = Anfangsknoten, j = Endknoten, k = Kapazität.

(c) Der Stollengang zwischen 1 und 2 wird plötzlich unpassierbar. Wie verändert sich die Matrix D_G? Was für ein Problem ergibt sich für Fahrzeuge, die sich zu diesem Zeitpunkt bereits im Bergwerk befinden? Geben Sie zwei mögliche Lösungen an, um diese Situation zu beherrschen.

Zusatzaufgabe 1 (AGS 9.4.14)
Das Modell eines Urwaldtelefonnetzes sei durch den folgenden kantenbewerteten, gerichteten Graphen G gegeben. Dabei ist die Bewertung der Kanten die Zuverlässigkeit, mit der ein Gespräch über diese Leitung aufgebaut werden kann. Gespräche zwischen Teilnehmern ohne Direktverbindung werden über Zwischenstationen vermittelt. Dabei ist zum Zustandekommen der Gesamtverbindung das Funktionieren aller beteiligten Direktverbindungen erforderlich.



(a) Um welches Problem handelt es sich? Geben Sie die Adjazenzmatrix A_G an!
(b) Berechnen Sie mit der Rekursionsformel die Matrizen $D_G^{(i)}$ für $0 \leq i \leq 5$. Schreiben Sie hierbei (außer bei $D_G = D_G^{(5)}$) jeweils nur die Matrixelemente auf, die sich gegenüber der vorherigen Matrix geändert haben, und benutzen Sie dafür die Notation: (i, j, k) mit $i =$ Anfangsknoten, $j =$ Endknoten, $k =$ Zuverlässigkeit.
(c) Die Sicherheit dieses Telefonnetzes soll verbessert werden. Es soll für alle möglichen Gespräche, außer jene von 4 nach 5, eine Zuverlässigkeit von mindestens 0,61 erreicht werden. Es stehen aber nur die Mittel zum Ausbau einer einzigen Leitung zur Verfügung. Welche Leitung muss verbessert werden, und welchen Zuverlässigkeitswert muss sie erhalten?

Zusatzaufgabe 2 (AGS 9.4.3 ⋆)
Die Kanten eines gerichteten Graphen G seien gegeben durch

$$(2,1,2),\ (1,4,10),\ (4,6,2),\ (6,5,1),\ (6,3,4),\ (6,2,8),\ (5,3,2),\ (3,2,3)\,,$$

wobei die Notation wie folgt zu lesen ist: (Anfangsknoten, Endknoten, Entfernung). Gesucht sind die kürzesten Wege.
(a) Welcher Semiring entspricht diesem Problem?
(b) Geben sie eine graphische Darstellung des Graphen sowie die Adjazenzmatrix A_G an.
(c) Berechnen Sie mit Hilfe des Aho-Algorithmus die Matrizen $D_G^{(i)}$ für $0 \leq i \leq 6$. Schreiben Sie hierbei (außer bei $D_G^{(0)}$ und $D_G = D_G^{(6)}$) jeweils nur die Matrixelemente auf, die sich gegenüber der vorherigen Matrix geändert haben, und benutzen Sie dafür die Notation: (i, j, k) mit $i =$ Anfangsknoten, $j =$ Endknoten, $k =$ Entfernung.
(d) Wie muss der Graph, im speziellen die Kanten, verändert werden, um eine symmetrische Matrix D_G zu erhalten? Welche Kanten brauchen nicht unbedingt verändert zu werden?