Algorithmen und Datenstrukturen

11. Übungsblatt

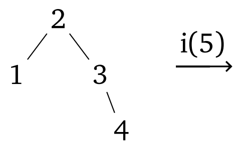
Zeitraum: 12. – 16. Januar 2015

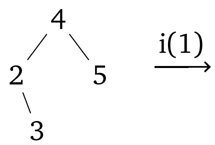
Übung 1 (AGS 8.12)

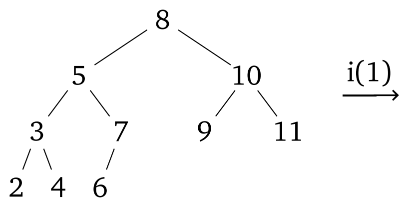
Fügen Sie in die folgenden AVL-Bäume den jeweils angegebenen Schlüssel ein. Ein einzufügender Schlüssel x wird durch $\mathrm{i}(x)$ notiert. Stellen Sie nach jedem Einfügen die AVL-Eigenschaft her und dokumentieren Sie hierbei konsequent den Einfüge–/Balancierungsalgorithmus mit den ausgeführten Operationen. Nutzen Sie die folgenden Abkürzungen:

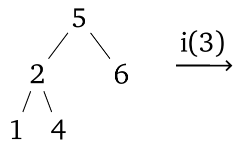
- $\mathrm{L}(x)$ – für die Linksrotation um den Knoten mit dem Schlüsselwert x,
- $\mathrm{R}(x)$ – für die Rechtsrotation um den Knoten mit dem Schlüsselwert x.

Geben Sie unmittelbar nach jedem i-Schritt alle Balancefaktoren des entstandenen Baums an.

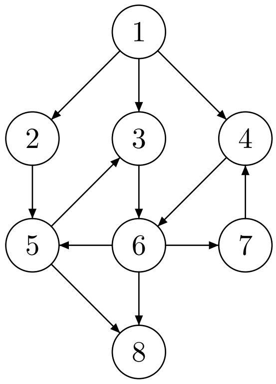








Übung 2 (AGS 9.2.10)
Der gerichtete Graph $G = (V, E)$ sei durch folgende Darstellung gegeben:

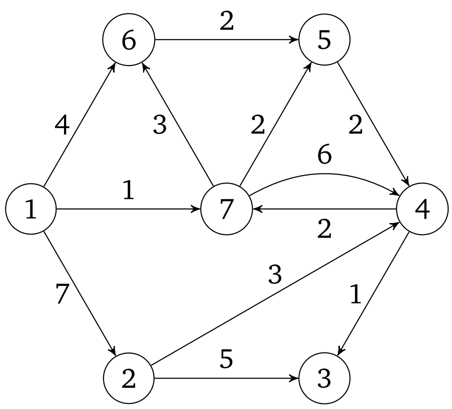


Achtung! Ausschließliches Vertauschen von Ästen der Lösungsbäume wird in dieser Aufgabe **nicht** als weitere Lösung gezählt!

(a) Wenden Sie auf den Graphen G den DFS-Algorithmus mit dem Startknoten 1 an, und bestimmen Sie auf diese Weise einen depth-first tree. Geben Sie drei unterschiedliche Lösungen an.

(b) Transformieren Sie G in den ungerichteten Graphen $G' = (V', E')$, indem Sie $V' = V$ setzen und E' nach der Vorschrift $E' = E \cup \{(j, i) \mid (i, j) \in E\}$ erzeugen. Wenden Sie nun auf G' den BFS-Algorithmus mit dem Startknoten 1 an, und bestimmen Sie einen breadth-first-tree. Geben Sie auch hier drei unterschiedliche Lösungen an.

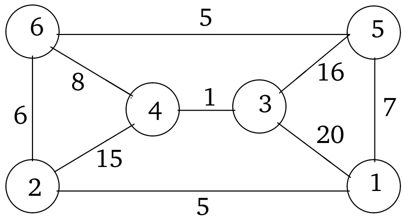
Übung 3 (AGS 9.5.13)
Der kantenbewertete Graph G sei durch folgende graphische Darstellung gegeben:



(a) Berechnen Sie mithilfe des Dijkstra-Algorithmus die minimale Entfernung vom Knoten mit der Nummer 1 zu allen erreichbaren Knoten. Protokollieren sie schrittweise die aktuelle Randknotenmenge und den zugehörigen Auswahlknoten. Geben Sie abschließend für alle berechneten kürzesten Wege die Entfernung und die jeweils zu durchlaufende Knotenfolge (Pfadtabelle) an.

(b) Welches ist das kleinste Gewicht, das man der Kante $(1, 2)$ zuweisen kann, ohne dass sich die unter **(a)** berechnete minimale Pfadlänge von 1 nach 3 ändert?

Übung 4 (AGS 9.5.3)
Der kantenbewertete Graph G sei durch folgende graphische Darstellung gegeben:



(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus die minimalen Entfernungen vom Knoten mit der Nummer 4 zu allen erreichbaren Knoten. Protokollieren Sie schrittweise die aktuelle Randknotenmenge und den zugehörigen Auswahlknoten. Geben Sie abschließend für alle berechneten kürzesten Wege die jeweils zu durchlaufende Knotenfolge an.

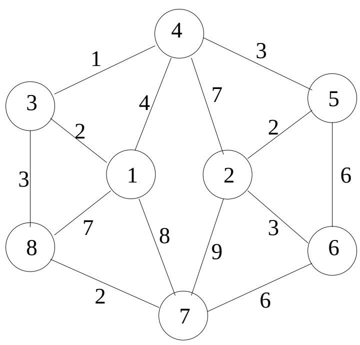
(b) Ändern Sie möglichst wenige Bewertungen von G so ab, dass die minimale Entfernung vom Knoten 4 zum Knoten 1 genau 21 wird und der dabei zu durchlaufende Weg über den Knoten 5 führt. Alle weiteren minimalen Entfernungen vom Knoten 4 sollen erhalten bleiben. Geben Sie Ihre Änderungen in der Notation $(i, j, c) =$ (Anfangsknoten, Endknoten, Entfernung) an.

Zusatzaufgabe 1 (AGS 9.2.2 ⋆)
Gegeben sei ein gerichteter Graph G durch folgende Knotenpaare (Kanten):
$(1,4),(2,1),(4,2),(4,3),(2,3),(3,5),(3,6),(5,7),(6,7),(8,7),(9,7)$.

(a) Wenden Sie auf den Graphen G den DFS-Algorithmus mit dem Startknoten 1 an und bestimmen Sie auf diese Weise den depth first tree. Geben Sie mindestens drei unterschiedliche Lösungen an. Zwischenschritte zu den Lösungen brauchen Sie nicht anzugeben.

(b) Transformieren Sie G in den ungerichteten Graphen $G' = (V', E')$, indem Sie $V' = V$ setzen und E' nach der Vorschrift $E' = E \cup \{(j,i) \mid (i,j) \in E\}$ erzeugen.
Wenden Sie nun auf G' den BFS-Algorithmus mit dem Startknoten 1 an und bestimmen Sie den breadth first tree. Geben Sie auch hier mindestens drei unterschiedliche Lösungen an. Zwischenschritte zu den Lösungen brauchen Sie nicht anzugeben.

Zusatzaufgabe 2
Der kantenbewertete ungerichtete Graph $G = (V, E)$ sei durch folgende Darstellung gegeben:



(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus die minimalen Entfernungen vom Knoten mit der Nummer 1 zu allen erreichbaren Knoten. Protokollieren Sie schrittweise jeweils die aktuelle Randknotenmenge und den zugehörigen Auswahlknoten. Geben Sie abschließend für jeden Knoten $v \in V$ die jeweils zu durchlaufende Knotenfolge auf dem kürzesten Weg von Knoten 1 nach v an.

(b) In G wird eine zusätzliche Kante (1,2) mit der Distanz 0 eingeführt. Wie verhalten sich nun die minimalen Entfernungen $l(2, i)$ von Knoten 2 nach i zu den minimalen Entfernungen $l(1, i)$ des Knotens 1 nach i, für $i \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?