Aufgabenblatt zur 6. Übung

Zeitraum: 18.05. bis 22.05.2009

1. Aufgabe: (AGS 11.48)

(a) Gegeben sei folgender λ–Term:

$$(\lambda x.(\lambda xy.x\ (\lambda x.y)\ y)(\lambda x.y))$$

Reduzieren Sie diesen Term solange, bis seine Normalform erreicht ist. Schreiben Sie – bevor Sie einen Ableitungsschritt ausführen – für die relevanten (Teil-)Ausdrücke die Mengen der freien bzw. der gebundenen Vorkommen von Variablen auf.

(b) Eine Funktion $f : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ sei wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lcllll} f(x,y) & = & y & & & \text{für } x = 1 \\ f(x,y) & = & 2 & * & f(x-1, y+1) & \text{wenn } x \text{ teilbar durch } 3 \\ f(x,y) & = & 3 & * & f(x-1, y) & \text{sonst} \end{array}$$

Geben Sie zur Funktion f den zugehörigen λ-Term $< F >$ an, so dass $< f >=< Y >< F >$ gilt.

(c) Folgender λ–Term sei gegeben:

$$\begin{array}{lcl} < G > & = & (\lambda gxy. < ite > (< iszero > (< pred > x))\ (< succ > y) \quad \hookleftarrow^{1} \\ & & (< mult > (< succ > y)\ (g(< pred > x)(< succ > (< succ > y))))) \end{array}$$

Berechnen Sie schrittweise $< Y >< G >< 2 >< 3 >$. Führen Sie im Rechenprozess zweckmäßige Abkürzungen der λ–Terme ein.

Bei der Lösung dieser Aufgabe dürfen Sie die λ-Terme $< succ >, < pred >, < iszero >, < true >, < false >, < ite >, < add >, < mult >, < mod >$ und $< n >$ mit $n \in \mathbb{N}$ als bekannt voraussetzen. Des Weiteren dürfen Sie bei der Lösung die folgenden Beziehungen benutzen:

$$< succ >< n > \Longrightarrow^{*} < n+1 > , \quad < pred >< n > \Longrightarrow^{*} < n-1 > \text{ für } n > 0 ,$$

$$< add >< n1 >< n2 > \Longrightarrow^{*} < n1 + n2 > , \quad < mult >< n1 >< n2 > \Longrightarrow^{*} < n1 * n2 >$$

$$< mod >< n >< m > \Longrightarrow^{*} < z > \text{ wobei } 0 \leq z < m \text{ mit } z = n - i \cdot m,\ i \in \mathbb{N}$$

$$< ite > \quad s\ s_1\ s_2 \Longrightarrow^{*} \begin{cases} s_1 \text{ wenn } s \Longrightarrow^{*} < true > \\ s_2 \text{ sonst} \end{cases}$$

$$< iszero > \quad s \Longrightarrow^{*} \begin{cases} < true > \text{ wenn } s \Longrightarrow^{*} < 0 > \\ < false > \text{ sonst} \end{cases}$$

$$< Y > = (\lambda h.((\lambda y.h(yy))(\lambda y.h(yy))))$$

2. Aufgabe: (AGS 11.58)

Berechnen Sie $< pred >< 0 >$, also den Vorgänger der λ-Repräsentation von 0.

[1] Zeilenumbruch, λ–Term erstreckt sich über 2 Zeilen.

3. Aufgabe: (Klausuraufgabe 02.2009)

(a) Gegeben sei folgender λ–Term: $\quad (\lambda xy.\ (\lambda z.\ z)(y\ x))\ (\lambda x.\ z\ y)$

Reduzieren Sie diesen Term solange, bis seine Normalform erreicht ist. Schreiben Sie – bevor Sie einen Ableitungsschritt ausführen – für die relevanten (Teil-)Ausdrücke die Mengen der freien bzw. der gebundenen Vorkommen von Variablen auf.

(b) Eine Funktion $g : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lcll} g(x,y) & = & 5 * y & \text{für } x = 1 \\ g(x,y) & = & g(x-1, y+2) * (2 + g(x-1, y+1)) & \text{wenn } x > 1 \end{array}$$

Geben Sie zur Funktion g den zugehörigen λ-Term $< G >$ an, so dass $< g > = < Y >< G >$ gilt.

(c) Folgender λ–Term sei gegeben:

$$\begin{array}{l} < F > = (\lambda uxy. < ite > (< iszero > (< pred > y))\ (< succ > x) \\ \qquad\qquad (< mult >\ x\ (\ u(< succ > x)(< pred > y)))) \end{array}$$

Berechnen Sie <u>schrittweise</u> $< Y >< F >< 6 >< 2 >$. Führen Sie im Rechenprozess zweckmäßige Abkürzungen der λ–Terme ein.

Hinweis: Bei der Lösung dieser Aufgabe dürfen Sie die λ-Terme $< succ >, < pred >, < iszero >, < true >, < false >, < ite >, < add >, < mult >$ und $< n >$ mit $n \in \mathbb{N}$ als bekannt voraussetzen. Des Weiteren dürfen Sie bei der Lösung die folgenden Beziehungen benutzen:

$< succ >< n > \Longrightarrow^* < n+1 >$, $\quad < pred >< n > \Longrightarrow^* < n-1 >$ für $n > 0$,
$< add >< n1 >< n2 > \Longrightarrow^* < n1 + n2 >$, $\quad < mult >< n1 >< n2 > \Longrightarrow^* < n1 * n2 >$,

$$< ite >\ \ s\ \ s_1\ \ s_2 \Longrightarrow^* \begin{cases} s_1\ wenn\ s \Longrightarrow^* < true > \\ s_2\ sonst \end{cases}$$

$$< iszero >\ \ s \Longrightarrow^* \begin{cases} < true >\ \ wenn\ s \Longrightarrow^* < 0 > \\ < false >\ \ sonst \end{cases}$$

$$< Y > = (\lambda h.((\lambda y.h(yy))(\lambda y.h(yy))))$$

Zusatzaufgabe: (AGS 11.43)

Listenpräsentation:
Die Liste $[A, B, C]$ wird repräsentiert durch $(\lambda f.fA(\lambda f.fB(\lambda f.fC\ \ nil)))$, abgekürzt durch: $\lambda((ABC))$.

Der Kopf der Liste sei definiert durch $\quad < hd > \equiv (\lambda p.p(\lambda xy.x))$,

der Rest der Liste durch $\quad < tl > \equiv (\lambda p.p(\lambda xy.y))$

sowie das Vorsetzen eines Elements vor eine Liste durch $\quad < cons > \equiv (\lambda xy.(\lambda f.fxy))$.

Berechnen Sie mit diesen Vorgaben $(< cons >\ (< hd >\ \lambda((CDE)))(< tl >\ \lambda((ABC))))$ und vergleichen das Ergebnis mit Ihrer intuitiven Erwartung.