

## Lösung zu Aufgabe 11.47

**Zu zeigen:** Für alle  $t :: \text{Tree}$ ,  $i :: \text{Int}$  gilt:

$$\text{add}(\text{neg } i \ t) = i * (\text{sub } t).$$

**Induktionsanfang (IA) mit  $t = \text{Leaf } a$  und  $i, a :: \text{Int}$  beliebig:**

$$\begin{aligned} \text{add } (\text{neg } i \ (\text{Leaf } a)) &\stackrel{12}{=} \text{add}(\text{Leaf } (a*i)) \\ &\stackrel{4}{=} a*i \\ &= i*a \\ &\stackrel{8}{=} i * (\text{sub } (\text{Leaf } a)) \end{aligned}$$

**Induktionsvoraussetzung (IV):**

$$\text{add } (\text{neg } x \ t1) = x * (\text{sub } t1) \tag{1}$$

$$\text{add } (\text{neg } y \ t2) = y * (\text{sub } t2) \tag{2}$$

**gelte für beliebige, aber feste Bäume  $t1, t2 :: \text{Tree}$  und  $x, y :: \text{Int}$ .**

**Induktionsschritt (IS) mit  $t = \text{Node } t1 \ t2$ :**

$$\begin{aligned} \text{add } (\text{neg } i \ (\text{Node } t1 \ t2)) &\stackrel{13}{=} \text{add } (\text{Node } (\text{neg } i \ t1) (\text{neg } (-i) \ t2)) \\ &\stackrel{5}{=} (\text{add } (\text{neg } i \ t1)) + (\text{add } (\text{neg } (-i) \ t2)) \\ &\stackrel{(1)}{=} i * (\text{sub } t1) + (\text{add } (\text{neg } (-i) \ t2)) \\ &\stackrel{(2)}{=} i * (\text{sub } t1) + (-i) * (\text{sub } t2) \\ &= i * ((\text{sub } t1) - (\text{sub } t2)) \\ &\stackrel{9}{=} i * (\text{sub } (\text{Node } t1 \ t2)) \end{aligned}$$