Aufgabenblatt zur 13. Übung

Zeitraum: 11.07. bis 15.07.2011

Bitte beachten Sie die Ankündigungen/Informationen auf der Homepage der LV Programmierung zur Klausurdurchführung!
Achtung: Die Klausur beginnt am 19.07.11 um 13:15 Uhr!

1. Aufgabe:

(a) Sie haben zwei Würfel, davon ist einer fair und bei dem anderen ist jede der Seiten mit geraden Augenzahlen drei Mal so wahrscheinlich wie jede der Seiten mit ungeraden Augenzahlen. Sie wählen einen der beiden Würfel aus und erzeugen bei zehn Würfen den folgenden Korpus:

$$h(1) = 1\ , \qquad h(2) = 2\ , \qquad h(3) = 2\ , \qquad h(4) = 1\ , \qquad h(5) = 1\ , \qquad h(6) = 3\ .$$

Welchen Würfel haben Sie wahrscheinlich gegriffen?

Lösung: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung p_1 des ersten Würfels ist

$$p_1(1) = p_1(2) = p_1(3) = p_1(4) = p_1(5) = p_1(6) = 1/6\ .$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung p_2 des zweiten Würfels ist

$$p_2(1) = p_2(3) = p_2(5) = 1/12\ , \qquad p_2(2) = p_2(4) = p_2(6) = 3/12 = 1/4\ .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
L(h, p_1) &= \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^{10}\ ,\\
L(h, p_2) &= \left(\frac{1}{12}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{12}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6\ .
\end{aligned}$$

Mit einem Taschenrechner kann man bestimmen, welcher der Werte größer ist. Die folgende Rechnung zeigt, dass $L(h, p_1) > L(h, p_2)$:

$$\begin{aligned}
L(h, p_1) > L(h, p_2) &\iff \left(\frac{1}{6}\right)^{10} > \left(\frac{1}{12}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{10}\\
&\iff 3^4 > \left(\frac{6}{4}\right)^{10} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}\\
&\iff 3^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^5\\
&\iff 2^5 > 3^3\\
&\iff 32 > 27\ .
\end{aligned}$$

Sie haben wahrscheinlich den ersten Würfel gegriffen.

(b) Nehmen Sie an, dass Sie den Korpus h mit einem beliebigen Würfel erzeugt haben. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Würfels ab.

Lösung: Der Würfel ist beliebig. Daher unterliegt dieser Schätzung das unbeschränkte Wahrscheinlichkeitsmodell $\mathcal{M}(X)$ mit $X = \{1, \ldots, 6\}$. Dann ist $\hat{p} = \mathrm{mle}(h, \mathcal{M}(X)) = \mathrm{rfe}(h)$, also

$$\hat{p}(1) = \frac{1}{10}\ , \quad \hat{p}(2) = \frac{2}{10}\ , \quad \hat{p}(3) = \frac{2}{10}\ , \quad \hat{p}(4) = \frac{1}{10}\ , \quad \hat{p}(5) = \frac{1}{10}\ , \quad \hat{p}(6) = \frac{3}{10}\ .$$

2. Aufgabe:

(a) Sie haben drei Münzen mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_1, p_2 und p_3:

$$p_1(K) = 0.5\ , \qquad p_2(K) = 0.3\ , \qquad p_3(K) = 0.6\ ,$$
$$p_1(Z) = 0.5\ , \qquad p_2(Z) = 0.7\ , \qquad p_3(Z) = 0.4\ .$$

Sie wählen zwei der Münzen aus und erzeugen durch sechzehnmaliges Werfen den folgenden Korpus:

$$h(K,K) = 2\ , \qquad h(K,Z) = 4\ , \qquad h(Z,K) = 4\ , \qquad h(Z,Z) = 6\ .$$

Welche zwei Münzen haben Sie wahrscheinlich gegriffen?

> **Lösung:** Wir müssen drei Möglichkeiten betrachten: entweder haben wir die Würfel 1 & 2, 1 & 3 oder 2 & 3 gewählt. Das durchgeführte Zufallsexperiment unterliegt also entweder der Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_1 \times p_2$, $p_1 \times p_3$ oder $p_2 \times p_3$ (aus Gründen der Symmetrie müssen wir die Fälle $p_2 \times p_1$, $p_3 \times p_1$ sowie $p_3 \times p_2$ nicht zusätzlich betrachten). Es gilt:
>
> $$\begin{aligned} L(h, p_1 \times p_2) &= (0.5 \cdot 0.3)^2 \cdot (0.5 \cdot 0.7)^4 \cdot (0.5 \cdot 0.3)^4 \cdot (0.5 \cdot 0.7)^6\ , \\ L(h, p_1 \times p_3) &= (0.5 \cdot 0.6)^2 \cdot (0.5 \cdot 0.4)^4 \cdot (0.5 \cdot 0.6)^4 \cdot (0.5 \cdot 0.4)^6\ , \\ L(h, p_2 \times p_3) &= (0.3 \cdot 0.6)^2 \cdot (0.3 \cdot 0.4)^4 \cdot (0.7 \cdot 0.6)^4 \cdot (0.7 \cdot 0.4)^6\ . \end{aligned}$$
>
> Mit einem Taschenrechner kann man diese Werte ausrechnen:
>
> $$\begin{aligned} L(h, p_1 \times p_2) &\approx 3.14 \cdot 10^{-10}\ , \\ L(h, p_1 \times p_3) &\approx 7.46 \cdot 10^{-11}\ , \\ L(h, p_2 \times p_3) &\approx 1.0 \cdot 10^{-10}\ . \end{aligned}$$
>
> Sie haben also schätzungsweise die ersten beiden Münzen gewählt.

(b) Nehmen Sie an, dass Sie mit zwei beliebigen Münzen den Korpus h erzeugt haben. Bestimmen Sie das Wahrscheinlichkeitsmodell und schätzen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der beiden Münzen.

> **Lösung:** Wir betrachten das Wahrscheinlichkeitsmodell
>
> $$\mathcal{M} = \{p_1 \times p_2 \mid p_1, p_2 \in \mathcal{M}(\{K, Z\})\}\ .$$
>
> Für dieses Modell gilt $\hat{p} = \text{mle}(h, \mathcal{M}) = \text{rfe}(h_1) \times \text{rfe}(h_2)$, wobei h_1 und h_2 jeweils $\{K, Z\}$-Korpora sind mit
>
> $$\begin{aligned} h_1(K) &= h(K,K) + h(K,Z) = 6\ , & h_1(Z) &= h(Z,K) + h(Z,Z) = 10\ , \\ h_2(K) &= h(K,K) + h(Z,K) = 6\ , & h_2(Z) &= h(K,Z) + h(Z,Z) = 10\ . \end{aligned}$$
>
> Dann ist
>
> $$\begin{aligned} \text{rfe}(h_1)(K) &= \frac{3}{8}\ , & \text{rfe}(h_1)(Z) &= \frac{5}{8}\ , \\ \text{rfe}(h_2)(K) &= \frac{3}{8}\ , & \text{rfe}(h_2)(Z) &= \frac{5}{8}\ . \end{aligned}$$
>
> Das sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der beiden Münzen. Übrigens: da $\hat{p} = \text{rfe}(h_1) \times \text{rfe}(h_2)$, erhält man
>
> $$\hat{p}(K,K) = \frac{9}{64}\ , \qquad \hat{p}(K,Z) = \frac{15}{64}\ , \qquad \hat{p}(Z,K) = \frac{15}{64}\ , \qquad \hat{p}(Z,Z) = \frac{25}{64}\ .$$

3. Aufgabe:

Bestimmen Sie für die folgenden Szenarien die Menge X der Ergebnisse und die Menge Y der Beobachtungen. Bestimmen Sie außerdem den Analysator.

(a) Werfen zweier unabhängiger Münzen. Sie können nur beobachten, ob beide Münzen a) dieselbe oder b) verschiedene Seiten zeigen.

> **Lösung:** Die Ergebnismenge ist $X = \{(K,K),(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\}$. Die Beobachtungsmenge ist $Y = \{\text{“}=\text{”}, \text{“}\neq\text{”}\}$. Der Analysator ist
>
> $$A(\text{“}=\text{”}) = \{(K,K),(Z,Z)\} , \qquad A(\text{“}\neq\text{”}) = \{(K,Z),(Z,K)\} .$$

(b) Werfen zweier Würfel, wobei Sie nur die Summe der Augenzahlen beobachten.

> **Lösung:** Die Ergebnismenge ist $X = \{1,\ldots,6\} \times \{1,\ldots,6\}$. Die Beobachtungsmenge ist $Y = \{2,\ldots,12\}$. Der Analysator ist
>
> $$A(2) = \{(1,1)\} , \qquad A(3) = \{(1,2),(2,1)\} , \qquad \ldots, \qquad A(12) = \{(6,6)\} .$$
>
> Im Allgemeinen ist $A(m) = \{(i,j) \mid i+j = m\}$.

(c) Zwei Spieler spielen Schere-Stein-Papier. Sie beobachten lediglich, welcher Spieler gewonnen hat bzw. ob das Spiel unentschieden ausging.

> **Lösung:** Die Ergebnismenge ist $X = \{\text{Schere}, \text{Stein}, \text{Papier}\}^2$. Die Beobachtungsmenge ist $Y = \{\text{Spieler1}, \text{Spieler2}, \text{Unentschieden}\}$. Der Analysator ist
>
> $$\begin{aligned} A(\text{Spieler1}) &= \{(\text{Schere}, \text{Papier}), (\text{Stein}, \text{Schere}), (\text{Papier}, \text{Stein})\} , \\ A(\text{Spieler2}) &= \{(\text{Schere}, \text{Stein}), (\text{Stein}, \text{Papier}), (\text{Papier}, \text{Schere})\} , \\ A(\text{Unentschieden}) &= \{(\text{Schere}, \text{Schere}), (\text{Stein}, \text{Stein}), (\text{Papier}, \text{Papier})\} . \end{aligned}$$

4. Aufgabe:

(a) Sie haben drei Münzen mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_1, p_2 und p_3:

$$\begin{aligned} p_1(K) &= 0.5 , & p_2(K) &= 0.3 , & p_3(K) &= 0.6 , \\ p_1(Z) &= 0.5 , & p_2(Z) &= 0.7 , & p_3(Z) &= 0.4 . \end{aligned}$$

Sie wählen zwei der Münzen, werfen diese fünf Mal und beobachten, dass die beiden Münzen genau zwei Mal auf der gleichen Seite liegen und drei Mal auf unterschiedlichen Seiten, sie haben also den folgenden Korpus mit unvollständigen Daten erzeugt:

$$h(=) = 2 , \qquad h(\neq) = 3 .$$

Wobei “=” die Beobachtung ist, dass beide Münzen auf der gleichen Seite liegen (und entsprechend “$\neq$”). Welche beiden Münzen haben Sie wahrscheinlich gegriffen?

> **Lösung:** Genau wie in der zweiten Übungsaufgabe kann man das Experiment mit einer der Verteilungen $p_1 \times p_2$, $p_1 \times p_3$ oder $p_2 \times p_3$ durchführen, wobei:
>
> $$\begin{aligned} (p_1 \times p_2)(K,K) &= 0.5 \cdot 0.3 = 0.15 , & (p_1 \times p_2)(K,Z) &= 0.5 \cdot 0.7 = 0.35 , \\ (p_1 \times p_2)(Z,K) &= 0.5 \cdot 0.3 = 0.15 , & (p_1 \times p_2)(Z,Z) &= 0.5 \cdot 0.7 = 0.35 , \\[1em] (p_1 \times p_3)(K,K) &= 0.5 \cdot 0.6 = 0.3 , & (p_1 \times p_3)(K,Z) &= 0.5 \cdot 0.4 = 0.2 , \\ (p_1 \times p_3)(Z,K) &= 0.5 \cdot 0.6 = 0.3 , & (p_1 \times p_3)(Z,Z) &= 0.5 \cdot 0.4 = 0.2 , \\[1em] (p_2 \times p_3)(K,K) &= 0.3 \cdot 0.6 = 0.18 , & (p_2 \times p_3)(K,Z) &= 0.3 \cdot 0.4 = 0.12 , \\ (p_2 \times p_3)(Z,K) &= 0.7 \cdot 0.6 = 0.42 , & (p_2 \times p_3)(Z,Z) &= 0.7 \cdot 0.4 = 0.28 . \end{aligned}$$

Um die Maximum-Likelihood-Schätzung für den Korpus h mit unvollständigen Daten durchführen zu können, muss man zunächst die Wahrscheinlichkeitsverteilungen $p_1 \times p_2$, $p_1 \times p_3$ und $p_2 \times p_3$ auf das Niveau der Beobachtungen heben:

$$(p_1 \times p_2)'(=) = (p_1 \times p_2)(K,K) + (p_1 \times p_2)(Z,Z) = 0.15 + 0.35 = 0.5 \ ,$$
$$(p_1 \times p_2)'(\neq) = (p_1 \times p_2)(K,Z) + (p_1 \times p_2)(Z,K) = 0.35 + 0.15 = 0.5 \ ,$$

$$(p_1 \times p_3)'(=) = (p_1 \times p_3)(K,K) + (p_1 \times p_3)(Z,Z) = 0.3 + 0.2 = 0.5 \ ,$$
$$(p_1 \times p_3)'(\neq) = (p_1 \times p_3)(K,Z) + (p_2 \times p_3)(Z,K) = 0.2 + 0.3 = 0.5 \ ,$$

$$(p_2 \times p_3)'(=) = (p_2 \times p_3)(K,K) + (p_1 \times p_3)(Z,Z) = 0.18 + 0.28 = 0.46 \ ,$$
$$(p_2 \times p_3)'(\neq) = (p_2 \times p_3)(K,Z) + (p_2 \times p_3)(Z,K) = 0.12 + 0.42 = 0.54 \ .$$

Dann ist

$$L(h,(p_1 \times p_2)') = \big((p_1 \times p_2)'(=)\big)^2 \cdot \big((p_1 \times p_2)'(\neq)\big)^3 = 0.5^2 \cdot 0.5^3 \ ,$$
$$L(h,(p_1 \times p_3)') = \big((p_1 \times p_3)'(=)\big)^2 \cdot \big((p_1 \times p_3)'(\neq)\big)^3 = 0.5^2 \cdot 0.5^3 \ ,$$
$$L(h,(p_2 \times p_3)') = \big((p_2 \times p_3)'(=)\big)^2 \cdot \big((p_2 \times p_3)'(\neq)\big)^3 = 0.46^2 \cdot 0.54^3 \ .$$

Offensichtlich ist $L(h,(p_2 \times p_3)')$ größer als $L(h,(p_1 \times p_2)')$ und $L(h,(p_1 \times p_3)')$. Daher haben Sie mutmaßlich die Münzen 2 & 3 gegriffen.

(b) Nehmen Sie nun an, Sie haben zwei beliebige Münzen fünf Mal geworfen und beobachtet, dass die beiden Münzen genau zwei Mal auf der gleichen Seite liegen und drei Mal auf unterschiedlichen Seiten. Überprüfen Sie, welche der folgenden statistischen Analysatoren d_1, d_2 und d_3 konsistent sind.

$$\begin{array}{llll} d_1(K,K) = 1/2 \ , & d_1(K,Z) = 1/2 \ , & d_1(Z,K) = 1/2 \ , & d_1(Z,Z) = 1/2 \ , \\ d_2(K,K) = 1/3 \ , & d_2(K,Z) = 1/9 \ , & d_2(Z,K) = 8/9 \ , & d_2(Z,Z) = 2/3 \ , \\ d_3(K,K) = 1/4 \ , & d_3(K,Z) = 3/4 \ , & d_3(Z,K) = 1/4 \ , & d_3(Z,Z) = 3/4 \ . \end{array}$$

Lösung: Wir berechnen zunächst für jeden der statistischen Analysatoren den vervollständigten Korpus (E-Schritt):

$$h_{d_1}(K,K) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \ , \qquad h_{d_1}(K,Z) = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ ,$$
$$h_{d_1}(Z,K) = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ , \qquad h_{d_1}(Z,Z) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \ ,$$

$$h_{d_2}(K,K) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \ , \qquad h_{d_2}(K,Z) = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \ ,$$
$$h_{d_2}(Z,K) = 3 \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{3} \ , \qquad h_{d_2}(Z,Z) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \ ,$$

$$h_{d_3}(K,K) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \ , \qquad h_{d_3}(K,Z) = 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \ ,$$
$$h_{d_3}(Z,K) = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \ , \qquad h_{d_3}(Z,Z) = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{4} \ .$$

Zu diesen Korpora bestimmen wir den Maximum-Likelihood-Schätzer (M-Schritt). Dabei geht man wie in Aufgabe 2(b) vor. Wir erhalten die folgenden geschätzten Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Münzen:

	Wahrscheinlichkeit für Kopf von Münze 1	Zahl Münze 1	Kopf Münze 2	Zahl Münze 2
d_1	1/2	1/2	1/2	1/2
d_2	1/5	4/5	2/3	1/3
d_3	11/20	9/20	1/4	3/4

Das führt zu den folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der Ergebnismenge $\{(K,K),(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\}$:

	$p(K,K)$	$p(K,Z)$	$p(Z,K)$	$p(Z,Z)$
d_1	1/4	1/4	1/4	1/4
d_2	2/15	1/15	8/15	4/15
d_3	11/80	33/80	9/80	27/80

Wir leiten die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten ab:

	$p\big((K,K)\mid=\big)$	$p\big((K,Z)\mid\neq\big)$	$p\big((Z,K)\mid\neq\big)$	$p\big((Z,Z)\mid=\big)$
d_1	1/2	1/2	1/2	1/2
d_2	1/3	1/9	8/9	2/3
d_3	11/38	33/42	9/42	27/38

Nur die statistischen Analysatoren d_1 und d_2 sind konsistent!

Zusatzaufgabe 1:

Bei beschränkten Modellen kann der Maximum-Likelihood-Schätzer im Allgemeinen nicht effizient bestimmt werden. Beinhaltet das Modell $\mathcal{M}$ aber die relative Häufigkeitsverteilung $\mathrm{rfe}(h)$ des gegebenen Korpus h, dann ist $\mathrm{mle}(\mathcal{M},h)=\mathrm{rfe}(h)$, denn keine andere Wahrscheinlichkeitsverteilung erzeugt eine höhere Likelihood.

Bestimmen Sie für die folgenden Situationen das Wahrscheinlichkeitsmodell, zeigen Sie, dass die relative Häufigkeitsverteilung des betrachteten Korpus in diesem enthalten ist und bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer.

(a) Werfen eines Würfels, bei dem gegenüberliegende Seiten die gleiche Wahrscheinlichkeit aufweisen. Betrachten Sie den folgenden Korpus:

$$h(1)=3\,,\qquad h(2)=5\,,\qquad h(3)=1\,,\qquad h(4)=1\,.\qquad h(5)=5\,,\qquad h(6)=3\,.$$

Lösung: Sei $X=\{1,\dots,6\}$. Das Wahrscheinlichkeitsmodell ist

$$\mathcal{M}=\{p\in\mathcal{M}(X)\mid p(1)=p(6),p(2)=p(5),p(3)=p(4)\}\,.$$

Die relative Häufigkeitsverteilung $\hat{p}=\mathrm{rfe}(h)$ des Korpus ist

$$\hat{p}(1)=3/18\,,\ \ \hat{p}(2)=5/18\,,\ \ \hat{p}(3)=1/18\,,\ \ \hat{p}(4)=1/18\,,\ \ \hat{p}(5)=5/18\,,\ \ \hat{p}(6)=3/18\,.$$

Diese Verteilung ist offensichtlich in $\mathcal{M}$. Deshalb ist $\mathrm{mle}(h,\mathcal{M})=\hat{p}$.

(b) Werfen zweier unabhängiger Münzen. Betrachten Sie den folgenden Korpus:

$$h(K,K)=2\,,\qquad h(K,Z)=4\,,\qquad h(Z,K)=4\,,\qquad h(Z,Z)=8\,.$$

Lösung: Das Wahrscheinlichkeitsmodell ist

$$\mathcal{M}=\big\{p_1\times p_2\mid p_1,p_2\in\mathcal{M}(\{K,Z\})\big\}\,.$$

Die relative Häufigkeitsverteilung $\hat{p}=\mathrm{rfe}(h)$ des Korpus ist

$$\hat{p}(K,K)=2/18\,,\quad \hat{p}(K,Z)=4/18\,,\quad \hat{p}(Z,K)=4/18\,,\quad \hat{p}(Z,Z)=8/18\,.$$

Diese Verteilung ist in $\mathcal{M}$, denn $\hat{p}=p_1\times p_2$ für die folgende Wahl von p_1 und p_2:

$$p_1(K)=1/3\,,\qquad p_1(Z)=2/3\,,\qquad p_2(K)=1/3\,,\qquad p_2(Z)=2/3\,.$$

Deshalb ist $\mathrm{mle}(h,\mathcal{M})=\hat{p}$.

(c) Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit fünf Kugeln. Die Kugeln sind weiß, schwarz oder rot. Betrachten Sie den folgenden Korpus:

$$h(W) = 4\,, \qquad h(S) = 2\,, \qquad h(R) = 4\,.$$

Lösung: Sei $X = \{W, S, R\}$. Da sich in der Urne fünf Kugeln befinden, muss die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen von der Form $w/5$ sein, wobei w die Anzahl der weißen Kugeln. Sinngemäß gilt das natürlich auch für die schwarzen und roten Kugeln. Das Wahrscheinlichkeitsmodell ist also

$$\mathcal{M} = \big\{p \in \mathcal{M}(X) \mid p(W), p(S), p(R) \in \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}\big\}\,.$$

Die relative Häufigkeitsverteilung $\hat{p} = \mathrm{rfe}(h)$ des Korpus ist

$$\hat{p}(W) = 4/10\,, \qquad \hat{p}(S) = 2/10\,, \qquad \hat{p}(R) = 4/10\,.$$

Diese Verteilung ist offensichtlich in $\mathcal{M}$. Deshalb ist $\mathrm{mle}(h, \mathcal{M}) = \hat{p}$.

Zusatzaufgabe 2:

Bestimmen Sie für jedes der folgenden Zufallsexperimente und dem zugehörigen Korpus den Maximum-Likelihood-Schätzer.

(a) Werfen einer Münze und eines davon unabhängigen Tetraeders mit dem folgenden Korpus:

$$\begin{array}{cccc} h(K,1) = 4\,, & h(K,2) = 1\,, & h(K,3) = 5\,, & h(K,4) = 3\,, \\ h(Z,1) = 2\,, & h(Z,2) = 2\,, & h(Z,3) = 0\,, & h(Z,4) = 3\,. \end{array}$$

Lösung: Wir betrachten das Wahrscheinlichkeitsmodell

$$\mathcal{M} = \big\{p_1 \times p_2 \mid p_1 \in \mathcal{M}(\{K, Z\}), p_2 \in \mathcal{M}(\{1, \dots, 4\})\big\}\,.$$

Für dieses Modell gilt $\hat{p} = \mathrm{mle}(h, \mathcal{M}) = \mathrm{rfe}(h_1) \times \mathrm{rfe}(h_2)$, wobei h_1 ein $\{K, Z\}$-Korpus und h_2 ein $\{1, \dots, 4\}$-Korpus ist mit

$$\begin{array}{ll} h_1(K) = h(K,1) + \dots + h(K,4) = 13\,, & h_1(Z) = h(Z,1) + \dots + h(Z,4) = 7\,, \\ h_2(1) = h(K,1) + h(Z,1) = 6\,, & h_2(2) = h(K,2) + h(Z,2) = 3\,, \\ h_2(3) = h(K,3) + h(Z,3) = 5\,, & h_2(4) = h(K,4) + h(Z,4) = 6\,. \end{array}$$

Dann ist

$$\begin{array}{ll} \mathrm{rfe}(h_1)(K) = \dfrac{13}{20}\,, & \mathrm{rfe}(h_1)(Z) = \dfrac{7}{20}\,, \\ \mathrm{rfe}(h_2)(1) = \dfrac{6}{20}\,, & \mathrm{rfe}(h_2)(2) = \dfrac{3}{20}\,, \\ \mathrm{rfe}(h_2)(3) = \dfrac{5}{20}\,, & \mathrm{rfe}(h_2)(4) = \dfrac{6}{20}\,. \end{array}$$

Das sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Münze und des Tetraeders. Da $\hat{p} = \mathrm{rfe}(h_1) \times \mathrm{rfe}(h_2)$, erhält man

$$\begin{array}{cccc} \hat{p}(K,1) = \dfrac{78}{400}\,, & \hat{p}(K,2) = \dfrac{39}{400}\,, & \hat{p}(K,3) = \dfrac{65}{400}\,, & \hat{p}(K,4) = \dfrac{78}{400}\,, \\ \hat{p}(Z,1) = \dfrac{42}{400}\,, & \hat{p}(Z,2) = \dfrac{21}{400}\,, & \hat{p}(Z,3) = \dfrac{35}{400}\,, & \hat{p}(Z,4) = \dfrac{42}{400}\,. \end{array}$$

(b) Werfen von drei unabhängigen Münzen mit dem folgenden Korpus:

$$\begin{array}{cccc} h(K,K,K) = 1\,, & h(K,K,Z) = 7\,, & h(K,Z,K) = 1\,, & h(K,Z,Z) = 3\,, \\ h(Z,K,K) = 5\,, & h(Z,K,Z) = 3\,, & h(Z,Z,K) = 2\,, & h(Z,Z,Z) = 5\,. \end{array}$$

Lösung: Wir betrachten das Wahrscheinlichkeitsmodell

$$\mathcal{M} = \left\{ p_1 \times p_2 \times p_3 \mid p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{M}(\{K, Z\}) \right\} .$$

Für dieses Modell gilt $\hat{p} = \mathrm{mle}(h, \mathcal{M}) = \mathrm{rfe}(h_1) \times \mathrm{rfe}(h_2) \times \mathrm{rfe}(h_2)$, wobei h_1, h_2 und h_3 jeweils $\{K, Z\}$-Korpora sind mit

$$\begin{aligned} h_1(K) &= h(K,K,K) + h(K,K,Z) + h(K,Z,K) + h(K,Z,Z) = 12 \ , \\ h_1(Z) &= h(Z,K,K) + h(Z,K,Z) + h(Z,Z,K) + h(Z,Z,Z) = 15 \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(K) &= h(K,K,K) + h(K,K,Z) + h(Z,K,K) + h(Z,K,Z) = 16 \ , \\ h_2(Z) &= h(K,Z,K) + h(K,Z,Z) + h(Z,Z,K) + h(Z,Z,Z) = 11 \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_3(K) &= h(K,K,K) + h(K,Z,K) + h(Z,K,K) + h(Z,Z,K) = 9 \ , \\ h_3(Z) &= h(K,K,Z) + h(K,Z,Z) + h(Z,K,Z) + h(Z,Z,Z) = 18 \ . \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{rfe}(h_1)(K) &= \frac{12}{27} \ , & \mathrm{rfe}(h_1)(Z) &= \frac{15}{27} \ , \\ \mathrm{rfe}(h_2)(K) &= \frac{16}{27} \ , & \mathrm{rfe}(h_2)(Z) &= \frac{11}{27} \ , \\ \mathrm{rfe}(h_3)(K) &= \frac{9}{27} \ , & \mathrm{rfe}(h_3)(Z) &= \frac{18}{27} \ . \end{aligned}$$

Das sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der drei Münzen. Da $\hat{p} = \mathrm{rfe}(h_1) \times \mathrm{rfe}(h_2) \times \mathrm{rfe}(h_3)$, erhält man

$$\begin{aligned} \hat{p}(K,K,K) &= \frac{1728}{27^3} \ , & \hat{p}(K,K,Z) &= \frac{3456}{27^3} \ , & \hat{p}(K,Z,K) &= \frac{1188}{27^3} \ , & \hat{p}(K,Z,Z) &= \frac{2376}{27^3} \ , \\ \hat{p}(Z,K,K) &= \frac{2160}{27^3} \ , & \hat{p}(Z,K,Z) &= \frac{4320}{27^3} \ , & \hat{p}(Z,Z,K) &= \frac{1485}{27^3} \ , & \hat{p}(Z,Z,Z) &= \frac{2970}{27^3} \ . \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 3:

(a) Sie haben drei Münzen mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_1, p_2 und p_3:

$$\begin{aligned} p_1(K) &= 0.5 \ , & p_2(K) &= 0.3 \ , & p_3(K) &= 0.6 \ , \\ p_1(Z) &= 0.5 \ , & p_2(Z) &= 0.7 \ , & p_3(Z) &= 0.4 \ . \end{aligned}$$

Sie wählen zwei der Münzen, werfen diese zehn Mal und zählen jedes Mal, wie oft Zahl zu sehen war. Dabei erzeugen Sie den folgenden Korpus mit unvollständigen Daten:

$$h(0) = 2 \ , \qquad h(1) = 5 \ , \qquad h(2) = 3 \ .$$

Welche beiden Münzen haben Sie wahrscheinlich gegriffen?

Lösung: Genau wie in der vierten Übungsaufgabe kann man das Experiment mit einer der Verteilungen $p_1 \times p_2$, $p_1 \times p_3$ oder $p_2 \times p_3$ durchführen. Um die Maximum-Likelihood-Schätzung für den Korpus h mit unvollständigen Daten durchführen zu können, muss man zunächst die Wahrscheinlichkeitsverteilungen $p_1 \times p_2$, $p_1 \times p_3$ und

$p_2 \times p_3$ auf das Niveau der Beobachtungsmenge $\{0,1,2\}$ heben:

$$\begin{aligned}
(p_1 \times p_2)'(0) &= (p_1 \times p_2)(K,K) = 0.15 \;, \\
(p_1 \times p_2)'(1) &= (p_1 \times p_2)(K,Z) + (p_1 \times p_2)(Z,K) = 0.35 + 0.15 = 0.5 \;, \\
(p_1 \times p_2)'(2) &= (p_1 \times p_2)(Z,Z) = 0.35 \;, \\[1em]
(p_1 \times p_3)'(0) &= (p_1 \times p_2)(K,K) = 0.3 \;, \\
(p_1 \times p_3)'(1) &= (p_1 \times p_2)(K,Z) + (p_1 \times p_2)(Z,K) = 0.3 + 0.2 = 0.5 \;, \\
(p_1 \times p_3)'(2) &= (p_1 \times p_2)(Z,Z) = 0.2 \;, \\[1em]
(p_2 \times p_3)'(0) &= (p_1 \times p_2)(K,K) = 0.18 \;, \\
(p_2 \times p_3)'(1) &= (p_1 \times p_2)(K,Z) + (p_1 \times p_2)(Z,K) = 0.12 + 0.42 = 0.54 \;, \\
(p_2 \times p_3)'(2) &= (p_1 \times p_2)(Z,Z) = 0.28 \;.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
L(h,(p_1 \times p_2)') &= \big((p_1 \times p_2)'(0)\big)^2 \cdot \big((p_1 \times p_2)'(1)\big)^5 \cdot \big((p_1 \times p_2)'(2)\big)^4 \\
&= 0.15^2 \cdot 0.5^5 \cdot 0.35^3 \approx 3.01 \cdot 10^{-5} \;, \\
L(h,(p_1 \times p_3)') &= \big((p_1 \times p_3)'(0)\big)^2 \cdot \big((p_1 \times p_3)'(1)\big)^5 \cdot \big((p_1 \times p_3)'(2)\big)^4 \\
&= 0.3^2 \cdot 0.5^5 \cdot 0.2^3 = 2.25 \cdot 10^{-5} \;, \\
L(h,(p_2 \times p_3)') &= \big((p_2 \times p_3)'(0)\big)^2 \cdot \big((p_2 \times p_3)'(1)\big)^5 \cdot \big((p_2 \times p_3)'(2)\big)^4 \\
&= 0.18^2 \cdot 0.54^5 \cdot 0.28^3 \approx 3.23 \cdot 10^{-5} \;.
\end{aligned}$$

Offensichtlich ergeben die letzten beiden Münzen die größte Korpuswahrscheinlichkeit. Sie haben mutmaßlich zu den Münzen 2 & 3 gegriffen.

(b) Nehmen Sie nun an, Sie haben zwei beliebige Münzen zehn Mal geworfen und dabei den Korpus h erzeugt. Überprüfen Sie, welche der folgenden statistischen Analysatoren d_1, d_2 und d_3 konsistent sind.

$$\begin{array}{llll}
d_1(K,K) = 1 \;, & d_1(K,Z) = 2/5 \;, & d_1(Z,K) = 3/5 \;, & d_1(Z,Z) = 1 \;, \\
d_2(K,K) = 1 \;, & d_2(K,Z) = 1/5 \;, & d_2(Z,K) = 4/5 \;, & d_2(Z,Z) = 1 \;, \\
d_3(K,K) = 1 \;, & d_3(K,Z) = 1/2 \;, & d_3(Z,K) = 1/2 \;, & d_3(Z,Z) = 1 \;.
\end{array}$$

Lösung: Wir berechnen zunächst für jeden der statistischen Analysatoren den vervollständigten Korpus (E-Schritt):

$$\begin{array}{ll}
h_{d_1}(K,K) = 2 \cdot 1 = 2 \;, & h_{d_1}(K,Z) = 5 \cdot \dfrac{2}{5} = 2 \;, \\
h_{d_1}(Z,K) = 5 \cdot \dfrac{3}{5} = 3 \;, & h_{d_1}(Z,Z) = 3 \cdot 1 = 3 \;, \\[1em]
h_{d_2}(K,K) = 2 \cdot 1 = 2 \;, & h_{d_2}(K,Z) = 5 \cdot \dfrac{1}{5} = 1 \;, \\
h_{d_2}(Z,K) = 5 \cdot \dfrac{4}{5} = 4 \;, & h_{d_2}(Z,Z) = 3 \cdot 1 = 3 \;, \\[1em]
h_{d_3}(K,K) = 2 \cdot 1 = 2 \;, & h_{d_3}(K,Z) = 5 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2} \;, \\
h_{d_3}(Z,K) = 5 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2} \;, & h_{d_3}(Z,Z) = 3 \cdot 1 = 3 \;.
\end{array}$$

Zu diesen Korpora bestimmen wir den Maximum-Likelihood-Schätzer (M-Schritt). Wir erhalten die folgenden geschätzten Münzverteilungen:

	Wahrscheinlichkeit für Kopf von Münze 1	Zahl Münze 1	Kopf Münze 2	Zahl Münze 2
d_1	4/10	6/10	5/10	5/10
d_2	3/10	7/10	6/10	4/10
d_3	9/20	11/20	9/20	11/20

Das führt zu den folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der Ergebnismenge $\{(K,K),(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\}$:

	$p(K,K)$	$p(K,Z)$	$p(Z,K)$	$p(Z,Z)$
d_1	20/100	20/100	30/100	30/100
d_2	18/100	12/100	42/100	28/100
d_3	81/400	99/400	99/400	121/400

Wir leiten die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten ab:

	$p\big((K,K) \mid 0\big)$	$p\big((K,Z) \mid 1\big)$	$p\big((Z,K) \mid 1\big)$	$p\big((Z,Z) \mid 2\big)$
d_1	1	2/5	3/5	1
d_2	1	2/9	7/9	1
d_3	1	1/2	1/2	1

Nur die statistischen Analysatoren d_1 und d_3 sind konsistent!

(c) Führen Sie den EM-Algorithmus mit Hilfe einer Tabellenkalkulation durch. Experimentieren Sie mit verschiedenen Startwerten und bestimmen Sie so alle konsistenten statistischen Analysatoren.

Es gibt drei konsistente statistische Analysatoren:

$$
\begin{array}{llll}
d_1(K,K) = 1\ , & d_1(K,Z) = 2/5\ , & d_1(Z,K) = 3/5\ , & d_1(Z,Z) = 1\ , \\
d_2(K,K) = 1\ , & d_2(K,Z) = 3/5\ , & d_2(Z,K) = 2/5\ , & d_2(Z,Z) = 1\ , \\
d_3(K,K) = 1\ , & d_3(K,Z) = 1/2\ , & d_3(Z,K) = 1/2\ , & d_3(Z,Z) = 1\ .
\end{array}
$$