# LV Programmierung

## Erstes Übungsblatt zum EM-Algorithmus – Lösungen

`http://www.orchid.inf.tu-dresden.de/`

**Übung 1**

**(a)** Beschreiben Sie die folgenden Zufallsexperimente formal durch Angabe einer Ergebnismenge und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung:

- Das Werfen von zwei fairen Würfeln.

  **Lösung:** $X = \{1, \ldots, 6\} \times \{1, \ldots, 6\} = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq 6\}$, $p(i, j) = 1/36$

- Das gleichzeitige Ziehen von jeweils einer Kugel aus zwei Urnen. Die erste Urne hat zwei weiße und drei schwarze Kugeln. Die zweite Urne hat eine rote, zwei blaue Kugeln und drei grüne Kugeln. Die Kugeln sind nicht unterscheidbar (abgesehen von ihrer Farbe).

  **Lösung:** Dieses Zufallsexperiment ist das unabhängige Produkt der folgenden beiden Zufallsexperimente:

  $$\begin{aligned} &X_1 = \{W, S\} , \qquad p_1(W) = 2/5 , \qquad p_1(S) = 3/5 , \\ &X_2 = \{R, G, B\} , \qquad p_2(R) = 1/6 , \qquad p_2(B) = 1/3 , \qquad p_2(G) = 1/2 . \end{aligned}$$

  Deshalb ist $X = \{W, S\} \times \{R, B, G\}$ und $p = p_1 \times p_2$, also:

  $$\begin{aligned} &p(W, R) = 1/15 , \qquad p(W, G) = 2/15 \qquad , p(W, B) = 1/5 , \\ &p(S, R) = 1/10 , \qquad p(S, G) = 1/5 , \qquad p(S, B) = 3/10 , \end{aligned}$$

- Das sechsmalige Werfen einer Münze, die mit Wahrscheinlichkeit 0,3 Kopf ergibt.

  **Lösung:** $X = \{K, Z\}^6$. Es gilt beispielsweise:

  $$p(K, K, K, Z, K, K) = 0.3^5 \cdot 0.7 , \qquad p(K, Z, K, K, Z, Z) = 0.3^3 \cdot 0.7^3 .$$

  Allgemein: für jedes $w \in X$ ist $p(w) = 0.3^{K(w)} \cdot 0.7^{Z(w)}$, wobei $K(w)$ die Anzahl von $K$ in $w$ und $Z(w)$ die Anzahl an $Z$ in $w$ ist.

**(b)** Geben Sie für die folgenden Szenarien jeweils die Ergebnismenge und das Wahrscheinlichkeitsmodell an. Bestimmen Sie ob das Wahrscheinlichkeitsmodell beschränkt oder unbeschränkt ist. Wenn das Modell beschränkt ist, dann geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung an, die sich nicht in dem Modell befindet.

- Das Werfen eines Tetraeders mit beliebigen Eigenschaften.

  **Lösung:** $X = \{1, 2, 3, 4\}$, wenn die Seiten von 1 bis 4 durchnummeriert sind. Das Modell ist unbeschränkt:

  $$\mathcal{M} = \mathcal{M}(X)$$

- Das Werfen eines Würfels, bei dem alle Seiten mit gerader Augenzahl die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

  **Lösung:** $X = \{1, \dots, 6\}$.

  $$\mathcal{M} = \{p \in \mathcal{M}(X) \mid p(2) = p(4) = p(6)\} \; .$$

  Das Modell ist beschränkt, da es z.B. die Verteilung $p$ mit $p(i) = i/21$ nicht enthält.

- Das zweimalige Werfen der gleichen Münze, diese darf beliebige Eigenschaften haben.

  **Lösung:** $X = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$.

  $$\mathcal{M} = \left\{p \times p \mid p \in \mathcal{M}(\{K, Z\})\right\} \; .$$

  Das Modell ist beschränkt: jede Verteilung mit $p(K, Z) \neq p(Z, K)$ ist nicht enthalten.

**(c)** Seien zwei Münzen mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1(K) = 0,7$ und $p_2(K) = 0,5$ gegeben. Bei einem Spiel können Sie sich eine der beiden Münzen wählen, diese fünf Mal werfen und erhalten einen Preis, wenn sie abwechselnd Kopf und Zahl werfen (beginnend mit Kopf). Welche der beiden Münzen würden Sie wählen?

**Lösung:** Wir können auf zwei Arten vorgehen: (1) die Zufallsexperimente für beide Münzen aufstellen, jeweils die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis $(K, Z, K, Z, K)$ bestimmen und die Münze mit der höheren Wahrscheinlichkeit wählen oder (2) die Maximum-Likelihood-Schätzung durchführen.

(1) Beide Zufallsexperimente haben die Ergebnismenge $\{K, Z\}^5$. Bei der ersten und zweiten Münze ergibt sich:

$$p_1(K, Z, K, Z, K) = 0.7^3 \cdot 0.3^2 \approx 0.0309 \; ,$$
$$p_2(K, Z, K, Z, K) = 0.5^3 \cdot 0.5^2 \approx 0.0313 \; .$$

Die zweite Münze bietet also einen Vorteil.

(2) Das Wahrscheinlichkeitsmodell ist $\mathcal{M} = \{p_1, p_2\}$ und der Korpus ist $h(K) = 3$, $h(Z) = 2$. Dann ist

$$L(h, p_1) = 0.7^3 \cdot 0.3^2 \approx 0.0309 \; ,$$
$$L(h, p_2) = 0.5^3 \cdot 0.5^2 \approx 0.0313 \; .$$

Dann ist

$$\mathrm{mle}(h, \mathcal{M}) = \mathrm{argmax}_{p \in \mathcal{M}} \, L(h, p) = p_2 \; .$$

Wenn Sie bei diesem Spiel unter allen möglichen Münzen wählen könnten, für welche würden Sie sich entscheiden?

**Lösung:** Hierzu berechnen wir den Maximum-Likelihood-Schätzer. Das Modell ist das unbeschränkte Modell $M = \mathcal{M}(\{K, Z\})$. Der Korpus ist $h(K) = 3$ und $h(Z) = 2$. Dann ist

$$\hat{p} = \mathrm{mle}(h, M) = \mathrm{argmax}_{p \in \mathcal{M}} \, L(h, p) = \mathrm{rfe}(h) \; .$$

Also $\hat{p}(K) = 0.6$ und $\hat{p}(Z) = 0.4$. □

**Übung 2 (Zusatzaufgabe)**

**(a)** Beschreiben Sie die folgenden Zufallsexperimente formal durch Angabe einer Ergebnismenge und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung:

- Das Werfen eines fairen Würfels.

  **Lösung:** $X = \{1, \dots, 6\}$, $p(i) = 1/6$.

- Das gleichzeitige Werfen der beiden Münzen $A$ und $B$, wobei die Münzen $A$ bzw. $B$ mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,3$ bzw. $0,6$ Kopf ergeben.

  **Lösung:** $X = \{K, Z\} \times \{K, Z\} = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$,

  $$p(K, K) = 0.18 , \quad p(K, Z) = 0.12 , \quad p(Z, K) = 0.42 , \quad p(Z, Z) = 0.28 .$$

- Das gleichzeitige Werfen der beiden Münzen $A$ und $C$, wobei die Münze $C$ mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,2$ Kopf ergibt.

  **Lösung:** $X = \{K, Z\} \times \{K, Z\} = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$,

  $$p(K, K) = 0.06 , \quad p(K, Z) = 0.24 , \quad p(Z, K) = 0.14 , \quad p(Z, Z) = 0.56 .$$

- Das Werfen der Münze $A$ und anschließendes Werfen der Münze $B$ (wenn $A$ Kopf ergeben hat) oder $C$ (wenn $A$ Zahl ergeben hat).

  **Lösung:** Natürlich gilt $X = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung kann man aus den beiden vorhergehenden Aufgabenteilen ablesen: Im Fall, dass $A$ Kopf ergeben hat (also für die Ergebenisse $(K, K)$ und $(K, Z)$) führt man im Endeffekt das Zufallsexperiment mit den Münzen $A$ und $B$ durch; im Fall, dass $A$ Zahl ergeben hat, führt man das Zufallsexperiment mit den Münzen $A$ und $C$ durch. Daher:

  $$p(K, K) = 0.18 , \quad p(K, Z) = 0.12 , \quad p(Z, K) = 0.14 , \quad p(Z, Z) = 0.56 .$$

- Das Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit (i) zwei weißen und drei schwarzen Kugeln, (ii) einer weißen und drei schwarzen Kugeln bzw. (iii) zwei weißen und zwei schwarzen Kugeln. Die Kugeln sind nicht unterscheidbar (abgesehen von ihrer Farbe).

  **Lösung:** Jeweils ist $X = \{W, S\}$. Es gilt:

  $$\begin{aligned} p_i(W) &= 2/5 , & p_{ii}(W) &= 1/4 , & p_{iii}(W) &= 1/2 , \\ p_i(S) &= 3/5 , & p_{ii}(S) &= 3/4 , & p_{iii}(S) &= 1/2 . \end{aligned}$$

- Das Ziehen einer Kugel aus Urne (i) und das anschließende Ziehen aus Urne (ii). Das Ziehen einer Kugel aus Urne (i) und das anschließende Ziehen aus Urne (iii).

  **Lösung:** Bei beiden Experimenten ist $X = \{(W, W), (W, S), (S, W), (S, S)\}$. Es gilt für das erste Zufallsexperiment:

  $$p(W, W) = 1/10 , \quad p(W, S) = 3/10 , \quad p(S, W) = 3/20 , \quad p(S, S) = 9/20 ,$$

  und bei dem zweiten Experiment:

  $$p(W, W) = 2/10 , \quad p(W, S) = 2/10 , \quad p(S, W) = 3/10 , \quad p(S, S) = 3/10 .$$

- Das zweimalige Ziehen einer Kugeln aus einer Urne mit zwei weißen und drei schwarzen Kugeln. Das Ziehen soll ohne Zurücklegen erfolgen. Tip: Nutzen Sie Ihr Wissen aus den vorhergehenden Aufgabenteilen.

**Lösung:** $X = \{W, S\} \times \{W, S\} = \{(W, W), (W, S), (S, W), (S, S)\}$. Zieht man zu Beginn eine weiße Kugel, dann führt man im Endeffekt das erste Zufallsexperiment aus dem vorhergehenden Aufgabenteil durch, ansonsten das zweite Zufallsexperiment; also:

$$p(W, W) = 1/10 \ , \quad p(W, S) = 3/10 \ , \quad p(S, W) = 3/10 \ , \quad p(S, S) = 3/10 \ .$$

- Das Ziehen von Kugeln aus einer Urne mit zwei weißen und drei schwarzen Kugeln, bis man das erste Mal eine schwarze Kugel zieht.

  **Lösung:** $X = \{S, WS, WWS\}$. Auch hier kann man ähnlich wie in den vorherigen Aufgabenstellungen einzelne Zufallsexperimente konstruieren (das einmalige Ziehen, das zweimalige Ziehen und das dreimalige Ziehen einer Kugel) und die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der einzelnen Experimente korrekt zusammensetzen:

  $$p(S) = 3/5 \ , \qquad p(WS) = 3/10 \ , \qquad p(WWS) = 1/10 \ .$$

**(b)** Geben Sie für die folgenden Szenarien jeweils die Ergebnismenge und das Wahrscheinlichkeitsmodell an. Bestimmen Sie ob das Wahrscheinlichkeitsmodell beschränkt oder unbeschränkt ist. Wenn das Modell beschränkt ist, dann geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung an, die sich nicht in dem Modell befindet.

- Das Werfen zweier Tetraeder mit beliebigen Eigenschaften.

  **Lösung:** $X = \{1, 2, 3, 4\}^2$.

  $$\mathcal{M} = \{p_1 \times p_2 \mid p_1, p_2 \in \mathcal{M}(\{1, 2, 3, 4\})\} \ .$$

  Das Modell ist beschränkt: die Verteilung $p$ mit $p(1, 2) = p(2, 1) = 0.5$ und $p(i, j) = 0$ für alle anderen $i, j$ kann nicht enthalten sein (denn dann ist $p(1, 1) = 0$; demnach $p_1(1) = 0$ oder $p_2(1) = 0$ und deshalb müsste einer der beiden Werte $p(1, 2)$ oder $p(2, 1)$ ebenfalls Null sein.

- Das Werfen einer Münze und ein anschließendes Werfen einer zweiten Münze, wenn die erste Münze Kopf zeigt. Die beiden Münzen können beliebige Eigenschaften haben.

  **Lösung:** Bei beiden Experimenten ist $X = \{(K, K), (K, Z), Z\}$. Das Modell $\mathcal{M}$ enthält jede Verteilung $p$, so dass es Münzverteilungen $p_1, p_2 \in \mathcal{M}(\{K, Z\})$ gibt mit

  $$p(K, K) = p_1(K) \cdot p_2(K) \ , \quad p(K, Z) = p_1(K) \cdot p_2(Z) \ , \quad p(Z) = p_1(Z) \ .$$

  Es zeigt sich, dass $\mathcal{M}$ unbeschränkt ist: für jede Verteilung $p \in \mathcal{M}(X)$ kann man passende Münzverteilungen $p_1$ und $p_2$ finden.

- Das Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit endlich vielen weißen und schwarzen Kugeln. Die Kugeln sind nicht unterscheidbar (abgesehen von ihrer Farbe).

  **Lösung:** $X = \{W, S\}$. In der Urne können beliebig viele weiße und schwarze Kugeln sein. Seien $n$ und $m$ die Anzahlen an weißen bzw. schwarzen Kugeln. Dann ist $p(W) = n/(n + m)$ und $p(S) = m/(n + m)$. Da $n$ und $m$ beliebig sind, gilt

  $$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{p \in \mathcal{M}(X) \mid \exists\, n, m \in \mathbb{N} : p(W) = n/(n + m), p(S) = m/(n + m)\} \\ &= \{p \in \mathcal{M}(X) \mid p(W) \in \mathbb{Q}\} \ . \end{aligned}$$

  Streng genommen ist dieses Modell beschränkt, weil es nur rationale Verteilungen zulässt.

**(c)** Gegeben sind drei Urnen $A$, $B$ und $C$ mit jeweils $A$) 10 roten, 30 weißen und 60 schwarzen Kugeln, $B$) 20 roten, 50 weißen und 30 schwarzen Kugeln und $C$) 40 roten, 30 weißen und 30 schwarzen Kugeln.

Sie wählen eine der Urnen und ziehen fünf Mal eine Kugel mit Zurücklegen. Dabei ziehen Sie eine rote, zwei weiße und zwei schwarze Kugeln. Welche Urne haben Sie schätzungsweise gewählt?

> **Lösung:** Wir wenden die Maximum-Likelihood-Schätzung an. Die Ergebnismenge ist $X = \{R, W, S\}$. Durch das Zurücklegen erreichen wir, dass das gleiche Zufallsexperiment wiederholt durchgeführt wird (wenn wir die Kugel nicht zurücklegen, dann verändert sich die Zusammensetzung der Urne und dementsprechend die Wahrscheinlichkeitsverteilung — man würde also bei jedem Griff nicht das gleiche, sondern jeweils ein anderes Zufallsexperiment durchführen). Wir haben den Korpus $h$ mit $h(R) = 1$ und $h(W) = h(S) = 2$ vorliegen.
>
> Die Wahrscheinlichkeitsmodell ist $\mathcal{M} = \{p_1, p_2, p_3\}$ mit
>
> $$\begin{aligned} p_1(R) &= 0.1\ , & p_1(W) &= 0.3\ , & p_1(S) &= 0.6\ , \\ p_2(R) &= 0.2\ , & p_2(W) &= 0.5\ , & p_2(S) &= 0.3\ , \\ p_3(R) &= 0.4\ , & p_3(W) &= 0.3\ , & p_3(S) &= 0.3\ . \end{aligned}$$
>
> Für die Korpuswahrscheinlichkeiten ergibt sich:
>
> $$\begin{aligned} L(h, p_1) &= p_1(R)^{h(R)} \cdot p_1(W)^{h(W)} \cdot p_1(S)^{h(S)} = 0.1^1 \cdot 0.3^2 \cdot 0.6^2 = 0.00324\ , \\ L(h, p_2) &= p_2(R)^{h(R)} \cdot p_2(W)^{h(W)} \cdot p_2(S)^{h(S)} = 0.2^1 \cdot 0.5^2 \cdot 0.3^2 = 0.0045\ , \\ L(h, p_3) &= p_3(R)^{h(R)} \cdot p_3(W)^{h(W)} \cdot p_3(S)^{h(S)} = 0.4^1 \cdot 0.3^2 \cdot 0.3^2 = 0.00324\ . \end{aligned}$$
>
> Deshalb ist $\mathrm{mle}(h, \mathcal{M}) = \mathrm{argmax}_{p \in \mathcal{M}} L(h, p) = p_2$.

Nehmen Sie an, Sie wissen von der Urne, aus der Sie die Kugeln gezogen haben, nur, dass sie 100 Kugeln enthält. Benutzen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzung, um zu bestimmen, welche Kugeln die Urne enthält.

> **Lösung:** Wieder ist $X = \{R, W, S\}$ und $h(R) = 1$ und $h(W) = h(S) = 2$.
>
> Das Wahrscheinlichkeitsmodell ist nicht so einfach zu erkennen. In der Urne kann sich jede Anzahl $r$ an roten, $w$ an weißen und $s$ an schwarzen Kugeln befinden, so dass $r + w + s = 100$. Für eine solche Urne ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(R) = r/100$, $p(W) = w/100$ und $p(S) = s/100$. Das Modell ist demnach
>
> $$\begin{aligned} \mathcal{M} = \{p \in \mathcal{M}(X) \mid \exists\, r, w, s \in \mathbb{N} : r + w + s = 100, \\ p(R) = r/100, p(W) = w/100, p(S) = s/100\}\ . \end{aligned}$$
>
> Dieses Modell ist endlich, wir müssten demnach für jede Wahrscheinlichkeitsverteilung in diesem Modell die Likelihood bestimmen. Das ist sehr aufwändig! Stattdessen nehmen wir einfach an, dass $\mathcal{M}$ das unbeschränkte Modell ist. Von diesem wissen wir, dass
>
> $$\hat{p} = \mathrm{mle}(h, \mathcal{M}(X)) = \mathrm{rfe}(h)\ ,$$
>
> also $\hat{p}(R) = 0.2$ und $\hat{p}(W) = \hat{p}(S) = 0.4$.

Offensichtlich ist $\hat{p} \in \mathcal{M}$ (nämlich für $r = 20$ und $w = s = 40$). Da $\hat{p}$ die maximierende Verteilung in dem unbeschränkten Modell $\mathcal{M}(X)$, ist sie erst recht die maximierende Verteilung in dem beschränkten Modell $\mathcal{M}$. Deshalb gilt:

$$\mathrm{mle}(h, \mathcal{M}) = \hat{p}.$$

Daraus schließen wir, dass in der Urne 20 rote und jeweils 40 weiße und schwarze Kugeln sind. $\square$