Aufgabenblatt zur 6. Übung

Zeitraum: 16.05. bis 20.05.2011

Übungsraumänderung: Ab Mittwoch, dem 18.05.11, finden die Übungen mittwochs in der 1. DS immer im Raum INF/E010 statt.

1. Aufgabe: (Klausuraufgabe 02.11)

(a) Berechnen Sie die Normalform untenstehenden λ-Terms, indem Sie ihn *schrittweise* reduzieren. Geben Sie dabei vor jedem Schritt für die relevanten Teilausdrücke die Mengen der gebunden bzw. frei vorkommenden Variablen an.

$$(\lambda zy.z\,(\lambda x.xy))\,(\lambda xy.x)$$

(b) Gegeben seien die λ-Terme

$$\langle F\rangle = \big(\lambda fznx.\langle ite\rangle\ (\langle iszero\rangle\ n)\ x\ (f\ z\ (\langle pred\rangle\ n)\ (\langle mult\rangle\ x\ z))\big) \quad \text{und}$$
$$\langle Y\rangle = \big(\lambda h.((\lambda y.h(yy))(\lambda y.h(yy)))\big)\ , \qquad \text{(Fixpunktkombinator)}$$

wobei wie üblich gelten soll

$$\langle ite\rangle\ s\ s_1\ s_2 \Rightarrow^* \begin{cases} s_1\ , & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle true\rangle \\ s_2 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \langle iszero\rangle\ s \Rightarrow^* \begin{cases} \langle true\rangle\ , & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle 0\rangle \\ \langle false\rangle\ , & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\langle pred\rangle\langle n\rangle \Rightarrow^* \langle n-1\rangle \qquad \text{für } n > 0\ , \qquad \langle mult\rangle\langle n_1\rangle\langle n_2\rangle \Rightarrow^* \langle n_1 * n_2\rangle\ .$$

Berechnen Sie schrittweise die Normalform des Terms $\langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 2\rangle\langle 1\rangle\langle 1\rangle$. Führen Sie im Rechenprozess zweckmäßige Abkürzungen der λ-Terme ein.

(c) Geben Sie die durch $\langle Y\rangle\langle F\rangle$ beschriebene rekursive Funktion als Haskell-Funktion an.

2. Aufgabe: (AGS 11.67)

Berechnen Sie $< pred >< 0 >$, also den Vorgänger der λ-Repräsentation von 0.
(λ-Repräsentation von $< pred >$ und $< 0 >$ siehe Skript.)

3. Aufgabe: (AGS 11.65)

(a) Gegeben sei folgender λ-Term:

$$(\lambda xy.y\ (\lambda x.x)\ x\ )(y\ (\lambda y.y))$$

Reduzieren Sie diesen Term bis seine Normalform erreicht ist. Schreiben Sie – bevor Sie einen Ableitungsschritt ausführen – für die relevanten (Teil-)Ausdrücke die Mengen der freien bzw. der gebundenen Vorkommen von Variablen auf.

(b) Gegeben sei der λ-Term:

$$< G >= (\lambda fxyz. < ite > (< iszero > (< mult > x\ y))\ (< add > x\ z)$$
$$(f\ (< succ > x)\ (< pred > y)\ (< succ > z)))$$

Berechnen Sie schrittweise die Normalform des Terms $< Y >< G >< 4 >< 1 >< 5 >$. Führen Sie im Rechenprozess zweckmäßige Abkürzungen der λ-Terme ein.

(c) Eine Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ sei wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lcll} f(x,y) & = & y & \text{für} \quad x = 0 \\ f(x,y) & = & y * y & \text{für} \quad x = 1 \\ f(x,y) & = & 2 + f(x-1, y+1) * f(x-2, y) & \text{für} \quad x \geq 2 \end{array}$$

Geben Sie zur Funktion f den zugehörigen λ-Term $< F >$ an, sodass $< f >=< Y >< F >$ gilt.

Hinweis:
Bei der Lösung dieser Aufgabe dürfen Sie die λ-Terme $< succ >, < pred >, < iszero >$, $< true >, < false >, < ite >, < add >, < mult >, < mod >$ und $< n >$ mit $n \in \mathbb{N}$ als bekannt voraussetzen. Des Weiteren dürfen Sie bei der Lösung die folgenden Beziehungen benutzen:

$$< succ >< n > \Longrightarrow^* < n+1 > , \quad < pred >< n > \Longrightarrow^* < n-1 > \text{ für } n > 0 ,$$

$$< add >< n1 >< n2 > \Longrightarrow^* < n1 + n2 > , \quad < mult >< n1 >< n2 > \Longrightarrow^* < n1 * n2 >$$

$$< mod >< n >< m > \Longrightarrow^* < z > \text{ wobei } 0 \leq z < m \text{ mit } z = n - i \cdot m, \ i \in \mathbb{N}$$

$$< ite > \quad s \ s_1 \ s_2 \Longrightarrow^* \begin{cases} s_1 \ wenn \ s \Longrightarrow^* < true > \\ s_2 \ sonst \end{cases}$$

$$< iszero > \quad s \Longrightarrow^* \begin{cases} < true > \ wenn \ s \Longrightarrow^* < 0 > \\ < false > \ sonst \end{cases}$$

$$< Y > = (\lambda h.((\lambda y.h(yy))(\lambda y.h(yy))))$$

Zusatzaufgabe: (AGS 11.50*)

Listenpräsentation:
Die Liste $[A, B, C]$ wird repräsentiert durch $(\lambda f.fA(\lambda f.fB(\lambda f.fC \ \ nil)))$, abgekürzt durch: $\lambda((ABC))$.

Der Kopf der Liste sei definiert durch $< hd > \equiv (\lambda p.p(\lambda xy.x))$,

der Rest der Liste durch $< tl > \equiv (\lambda p.p(\lambda xy.y))$

sowie das Vorsetzen eines Elements vor eine Liste durch $< cons > \equiv (\lambda xy.(\lambda f.fxy))$.

Berechnen Sie mit diesen Vorgaben $(< cons > (< hd > \lambda((CDE)))(< tl > \lambda((ABC))))$ und vergleichen das Ergebnis mit Ihrer intuitiven Erwartung.