

# Aufgabenblatt zur 5. Übung

Zeitraum: 09.05. bis 13.05.2011

**Achtung: Übungsraumverlegung:** einmalig am Freitag, dem 13.05.2011, 1. DS  
von INF/E023 nach HSZ/E01.

## 1. Aufgabe: (Klausuraufgabe 02.2011)

Folgende Definitionen seien gegeben:

- 1 `add :: Int -> [Int] -> [Int]`
- 2 `add a [] = []`
- 3 `add a (x:xs) = a+x:add a xs`

Die folgende Aussage soll mittels struktureller Induktion über Listen bewiesen werden. Für jede Liste `l :: [Int]` und jedes Paar von ganzen Zahlen `a, b :: Int` gilt:

$$\text{add } b \text{ (add } a \text{ l)} = \text{add } (a+b) \text{ l.}$$

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben; geben Sie jeweils die benutzten Gesetzmäßigkeiten oder Definitionen an.

- (a) Zeigen Sie den Induktionsanfang.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- (b) Geben Sie die Induktionsvoraussetzung *vollständig* an.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- (c) Zeigen Sie den Induktionsschritt.

## 2. Aufgabe: (AGS 11.35)

Folgende Definitionen seien gegeben:

`data Tree = Leaf Int | Branch Int Tree Tree`

- 1 `prod :: [Int] -> Int`
- 2 `prod [] = 1`
- 3 `prod (a:xs) = a * (prod xs)`
  
- 4 `prodTree :: Tree -> Int`
- 5 `prodTree (Leaf x) = x`
- 6 `prodTree (Branch x y z) = x * (prodTree y) * (prodTree z)`
  
- 7 `collapse :: Tree -> [Int]`
- 8 `collapse (Leaf x) = [x]`
- 9 `collapse (Branch x y z) = (collapse y) ++ [x] ++ (collapse z)`

Zeigen Sie unter Verwendung der oben aufgeführten Definitionen durch strukturelle Induktion die Gültigkeit der folgenden Gleichung:

prodTree t = prod (collapse t)

Gehen Sie davon aus, dass die Beziehung  $\text{prod } (x ++ y) = (\text{prod } x) * (\text{prod } y)$  bereits bewiesen ist.

### 3. Aufgabe: (AGS 11.55)

(a) Gegeben sei folgender  $\lambda$ -Term:

$$(\lambda x.(\lambda xy.x (\lambda x.y) y)(\lambda x.y))$$

Reduzieren Sie diesen Term solange, bis seine Normalform erreicht ist. Schreiben Sie – bevor Sie einen Ableitungsschritt ausführen – für die relevanten (Teil-)Ausdrücke die Mengen der freien bzw. der gebundenen Vorkommen von Variablen auf.

(b) Eine Funktion  $f : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$  sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y && \text{für } x = 1 \\ f(x, y) &= 2 * f(x - 1, y + 1) && \text{wenn } x \text{ teilbar durch } 3 \\ f(x, y) &= 3 * f(x - 1, y) && \text{sonst} \end{aligned}$$

Geben Sie zur Funktion  $f$  den zugehörigen  $\lambda$ -Term  $\langle F \rangle$  an, so dass  $\langle f \rangle = \langle Y \rangle \langle F \rangle$  gilt.

(c) Folgender  $\lambda$ -Term sei gegeben:

$$\langle G \rangle = (\lambda gxy. \langle ite \rangle (\langle iszero \rangle (\langle pred \rangle x)) (\langle succ \rangle y) \leftrightarrow^1 (\langle mult \rangle (\langle succ \rangle y) (g(\langle pred \rangle x)(\langle succ \rangle (\langle succ \rangle y))))))$$

Berechnen Sie schrittweise  $\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle$ . Führen Sie im Rechenprozess zweckmäßige Abkürzungen der  $\lambda$ -Terme ein.

Bei der Lösung dieser Aufgabe dürfen Sie die  $\lambda$ -Terme  $\langle succ \rangle, \langle pred \rangle, \langle iszero \rangle, \langle true \rangle, \langle false \rangle, \langle ite \rangle, \langle add \rangle, \langle mult \rangle, \langle mod \rangle$  und  $\langle n \rangle$  mit  $n \in \mathbb{N}$  als bekannt voraussetzen. Des Weiteren dürfen Sie bei der Lösung die folgenden Beziehungen benutzen:

$$\begin{aligned} \langle succ \rangle \langle n \rangle &\Longrightarrow^* \langle n + 1 \rangle, & \langle pred \rangle \langle n \rangle &\Longrightarrow^* \langle n - 1 \rangle \text{ für } n > 0, \\ \langle add \rangle \langle n1 \rangle \langle n2 \rangle &\Longrightarrow^* \langle n1 + n2 \rangle, & \langle mult \rangle \langle n1 \rangle \langle n2 \rangle &\Longrightarrow^* \langle n1 * n2 \rangle \\ \langle mod \rangle \langle n \rangle \langle m \rangle &\Longrightarrow^* \langle z \rangle \text{ wobei } 0 \leq z < m \text{ mit } z = n - i \cdot m, i \in \mathbb{N} \\ \langle ite \rangle s s_1 s_2 &\Longrightarrow^* \begin{cases} s_1 \text{ wenn } s \Longrightarrow^* \langle true \rangle \\ s_2 \text{ sonst} \end{cases} \\ \langle iszero \rangle s &\Longrightarrow^* \begin{cases} \langle true \rangle \text{ wenn } s \Longrightarrow^* \langle 0 \rangle \\ \langle false \rangle \text{ sonst} \end{cases} \\ \langle Y \rangle &= (\lambda h.((\lambda y.h(yy))(\lambda y.h(yy)))) \end{aligned}$$

### Zusatzaufgabe 1: (AGS 11.48\*)

(a) Bestimmen Sie für jeden der folgenden  $\lambda$ -Terme  $t$  die Mengen  $FV(t)$  und  $GV(t)$ :

- $(\lambda x.x y) (\lambda y.y)$
- $(\lambda x.(\lambda y.z (\lambda z.z (\lambda x.y))))$
- $(\lambda x.(\lambda y.x z (y z))) (\lambda x.y (\lambda y.y))$

<sup>1</sup>Zeilenumbruch,  $\lambda$ -Term erstreckt sich über 2 Zeilen.

(b) Reduzieren Sie die folgenden  $\lambda$ -Terme zu Normalformen. Schreiben Sie – bevor Sie einen Ableitungsschritt ausführen – für die relevanten (Teil-)Ausdrücke die Mengen der freien bzw. der gebundenen Vorkommen von Variablen auf.

- $(\lambda x.(\lambda y.x z (y z))) (\lambda x.y (\lambda y.y))$
- $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.z))) x (+ y 1)$
- $(\lambda x.(\lambda y.x (\lambda z.y z))) (((\lambda x.(\lambda y.y)) 8) (\lambda x.(\lambda y.y) x))$
- $(\lambda h.(\lambda x.h (x x)) (\lambda x.h (x x))) ((\lambda x.x) (+ 1 5))$
- $(\lambda f.(\lambda a.(\lambda b.f a b))) (\lambda x.(\lambda y.x))$

### Zusatzaufgabe 2: (AGS 11.47)

Folgende Definitionen seien gegeben:

```

1  data Tree = Leaf Int | Node Tree Tree
2
3  add :: Tree -> Int
4  add (Leaf a)      = a
5  add (Node t1 t2)  = (add t1) + (add t2)
6
7  sub :: Tree -> Int
8  sub (Leaf a)      = a
9  sub (Node t1 t2)  = (sub t1) - (sub t2)
10
11 neg :: Int -> Tree -> Tree
12 neg i (Leaf a)    = Leaf (a*i)
13 neg i (Node t1 t2) = Node (neg i t1) (neg (-i) t2)

```

Zeigen Sie für die oben aufgeführten Definitionen mit Hilfe der Induktion über Bäumen, dass die folgende Gleichung für jeden Baum  $t :: \text{Tree}$  und jede ganze Zahl  $i :: \text{Int}$  erfüllt ist:

$$\text{add } (\text{neg } i \ t) = i * (\text{sub } t) .$$

Geben Sie bei Umformungen die jeweils benutzten Gesetzmäßigkeiten/Definitionen an.