Aufgabenblatt zur 13. Übung

Zeitraum: 11.07. bis 15.07.2011

Bitte beachten Sie die Ankündigungen/Informationen auf der Homepage der LV Programmierung zur Klausurdurchführung!
Achtung: Die Klausur beginnt am 19.07.11 um <u>13:15 Uhr</u>!

1. Aufgabe:

(a) Sie haben zwei Würfel, davon ist einer fair und bei dem anderen ist jede der Seiten mit geraden Augenzahlen drei Mal so wahrscheinlich wie jede der Seiten mit ungeraden Augenzahlen. Sie wählen einen der beiden Würfel aus und erzeugen bei zehn Würfen den folgenden Korpus:

$$h(1) = 1\ , \qquad h(2) = 2\ , \qquad h(3) = 2\ , \qquad h(4) = 1\ , \qquad h(5) = 1\ , \qquad h(6) = 3\ .$$

Welchen Würfel haben Sie wahrscheinlich gegriffen?

(b) Nehmen Sie an, dass Sie den Korpus h mit einem beliebigen Würfel erzeugt haben. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Würfels ab.

2. Aufgabe:

(a) Sie haben drei Münzen mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_1, p_2 und p_3:

$$\begin{array}{lll} p_1(K) = 0.5\ , & p_2(K) = 0.3\ , & p_3(K) = 0.6\ , \\ p_1(Z) = 0.5\ , & p_2(Z) = 0.7\ , & p_3(Z) = 0.4\ . \end{array}$$

Sie wählen zwei der Münzen aus und erzeugen durch sechzehnmaliges Werfen den folgenden Korpus:

$$h(K,K) = 2\ , \qquad h(K,Z) = 4\ , \qquad h(Z,K) = 4\ , \qquad h(Z,Z) = 6\ .$$

Welche zwei Münzen haben Sie wahrscheinlich gegriffen?

(b) Nehmen Sie an, dass Sie mit zwei beliebigen Münzen den Korpus h erzeugt haben. Bestimmen Sie das Wahrscheinlichkeitsmodell und schätzen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der beiden Münzen.

3. Aufgabe:

Bestimmen Sie für die folgenden Szenarien die Menge X der Ergebnisse und die Menge Y der Beobachtungen. Bestimmen Sie außerdem den Analysator.

(a) Werfen zweier unabhängiger Münzen. Sie können nur beobachten, ob beide Münzen a) dieselbe oder b) verschiedene Seiten zeigen.

(b) Werfen zweier Würfel, wobei Sie nur die Summe der Augenzahlen beobachten.

(c) Zwei Spieler spielen Schere-Stein-Papier. Sie beobachten lediglich, welcher Spieler gewonnen hat bzw. ob das Spiel unentschieden ausging.

4. Aufgabe:

(a) Sie haben drei Münzen mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_1, p_2 und p_3:

$$p_1(K) = 0.5\ , \qquad p_2(K) = 0.3\ , \qquad p_3(K) = 0.6\ ,$$
$$p_1(Z) = 0.5\ , \qquad p_2(Z) = 0.7\ , \qquad p_3(Z) = 0.4\ .$$

Sie wählen zwei der Münzen, werfen diese fünf Mal und beobachten, dass die beiden Münzen genau zwei Mal auf der gleichen Seite liegen und drei Mal auf unterschiedlichen Seiten, sie haben also den folgenden Korpus mit unvollständigen Daten erzeugt:

$$h(=) = 2\ , \qquad h(\neq) = 3\ .$$

Wobei "=" die Beobachtung ist, dass beide Münzen auf der gleichen Seite liegen (und entsprechend "$\neq$"). Welche beiden Münzen haben Sie wahrscheinlich gegriffen?

(b) Nehmen Sie nun an, Sie haben zwei beliebige Münzen fünf Mal geworfen und beobachtet, dass die beiden Münzen genau zwei Mal auf der gleichen Seite liegen und drei Mal auf unterschiedlichen Seiten. Überprüfen Sie, welche der folgenden statistischen Analysatoren d_1, d_2 und d_3 konsistent sind.

$$d_1(K,K) = 1/2\ , \quad d_1(K,Z) = 1/2\ , \quad d_1(Z,K) = 1/2\ , \quad d_1(Z,Z) = 1/2\ ,$$
$$d_2(K,K) = 1/3\ , \quad d_2(K,Z) = 1/9\ , \quad d_2(Z,K) = 8/9\ , \quad d_2(Z,Z) = 2/3\ ,$$
$$d_3(K,K) = 1/4\ , \quad d_3(K,Z) = 3/4\ , \quad d_3(Z,K) = 1/4\ , \quad d_3(Z,Z) = 3/4\ .$$

Zusatzaufgabe 1:

Bei beschränkten Modellen kann der Maximum-Likelihood-Schätzer im Allgemeinen nicht effizient bestimmt werden. Beinhaltet das Modell $\mathcal{M}$ aber die relative Häufigkeitsverteilung $\mathrm{rfe}(h)$ des gegebenen Korpus h, dann ist $\mathrm{mle}(\mathcal{M}, h) = \mathrm{rfe}(h)$, denn keine andere Wahrscheinlichkeitsverteilung erzeugt eine höhere Likelihood.

Bestimmen Sie für die folgenden Situationen das Wahrscheinlichkeitsmodell, zeigen Sie dass die relative Häufigkeitsverteilung des betrachteten Korpus in diesem enthalten ist und bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer.

(a) Werfen eines Würfels, bei dem gegenüberliegende Seiten die gleiche Wahrscheinlichkeit aufweisen. Betrachten Sie den folgenden Korpus:

$$h(1) = 3\ , \quad h(2) = 5\ , \quad h(3) = 1\ , \quad h(4) = 1\ . \quad h(5) = 5\ , \quad h(6) = 3\ .$$

(b) Werfen zweier unabhängiger Münzen. Betrachten Sie den folgenden Korpus:

$$h(K,K) = 2\ , \quad h(K,Z) = 4\ , \quad h(Z,K) = 4\ , \quad h(Z,Z) = 8\ .$$

(c) Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit fünf Kugeln. Die Kugeln sind weiß, schwarz oder rot. Betrachten Sie den folgenden Korpus:

$$h(W) = 4\ , \qquad h(S) = 2\ , \qquad h(R) = 4\ .$$

Zusatzaufgabe 2:

Bestimmen Sie für jedes der folgenden Zufallsexperimente und dem zugehörigen Korpus den Maximum-Likelihood-Schätzer.

(a) Werfen einer Münze und eines davon unabhängigen Tetraeders mit dem folgenden Korpus:

$$h(K,1) = 4\ , \quad h(K,2) = 1\ , \quad h(K,3) = 5\ , \quad h(K,4) = 3\ ,$$
$$h(Z,1) = 2\ , \quad h(Z,2) = 2\ , \quad h(Z,3) = 0\ , \quad h(Z,4) = 3\ .$$

(b) Werfen von drei unabhängigen Münzen mit dem folgenden Korpus:

$$\begin{array}{llll} h(K,K,K) = 1\ , & h(K,K,Z) = 7\ , & h(K,Z,K) = 1\ , & h(K,Z,Z) = 3\ , \\ h(Z,K,K) = 5\ , & h(Z,K,Z) = 3\ , & h(Z,Z,K) = 2\ , & h(Z,Z,Z) = 5\ . \end{array}$$

Zusatzaufgabe 3:

(a) Sie haben drei Münzen mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_1, p_2 und p_3:

$$\begin{array}{lll} p_1(K) = 0.5\ , & p_2(K) = 0.3\ , & p_3(K) = 0.6\ , \\ p_1(Z) = 0.5\ , & p_2(Z) = 0.7\ , & p_3(Z) = 0.4\ . \end{array}$$

Sie wählen zwei der Münzen, werfen diese zehn Mal und zählen jedes Mal, wie oft Zahl zu sehen war. Dabei erzeugen Sie den folgenden Korpus mit unvollständigen Daten:

$$h(0) = 2\ , \qquad h(1) = 5\ , \qquad h(2) = 3\ .$$

Welche beiden Münzen haben Sie wahrscheinlich gegriffen?

(b) Nehmen Sie nun an, Sie haben zwei beliebige Münzen zehn Mal geworfen und dabei den Korpus h erzeugt. Überprüfen Sie, welche der folgenden statistischen Analysatoren d_1, d_2 und d_3 konsistent sind.

$$\begin{array}{llll} d_1(K,K) = 1\ , & d_1(K,Z) = 2/5\ , & d_1(Z,K) = 3/5\ , & d_1(Z,Z) = 1\ , \\ d_2(K,K) = 1\ , & d_2(K,Z) = 1/5\ , & d_2(Z,K) = 4/5\ , & d_2(Z,Z) = 1\ , \\ d_3(K,K) = 1\ , & d_3(K,Z) = 1/2\ , & d_3(Z,K) = 1/2\ , & d_3(Z,Z) = 1\ . \end{array}$$

(c) Führen Sie den EM-Algorithmus mit Hilfe einer Tabellenkalkulation durch. Experimentieren Sie mit verschiedenen Startwerten und bestimmen Sie so alle konsistenten statistischen Analysatoren.