Aufgabenblatt zur 6. Übung

Zeitraum: 31.05. bis 04.06.2010

1. Aufgabe: (AGS 11.52)

(a) Gegeben sei folgender λ–Term:

$$(\lambda x.(\lambda xy.x\ (\lambda x.y)\ y)(\lambda x.y))$$

Reduzieren Sie diesen Term solange, bis seine Normalform erreicht ist. Schreiben Sie – bevor Sie einen Ableitungsschritt ausführen – für die relevanten (Teil-)Ausdrücke die Mengen der freien bzw. der gebundenen Vorkommen von Variablen auf.

(b) Eine Funktion $f : I\!N^+ \times I\!N^+ \rightarrow I\!N^+$ sei wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lllll} f(x,y) & = & y & & \text{für } x = 1 \\ f(x,y) & = & 2 & * \quad f(x-1, y+1) & \text{wenn } x \text{ teilbar durch } 3 \\ f(x,y) & = & 3 & * \quad f(x-1, y) & \text{sonst} \end{array}$$

Geben Sie zur Funktion f den zugehörigen λ-Term $< F >$ an, so dass $< f >=< Y >< F >$ gilt.

(c) Folgender λ–Term sei gegeben:

$$\begin{array}{lll} < G > & = & (\lambda gxy. < ite > (< iszero > (< pred > x))\ (< succ > y) \quad \hookleftarrow^{1} \\ & & (< mult > (< succ > y)\ (g(< pred > x)(< succ > (< succ > y))))) \end{array}$$

Berechnen Sie schrittweise $< Y >< G >< 2 >< 3 >$. Führen Sie im Rechenprozess zweckmäßige Abkürzungen der λ–Terme ein.

Bei der Lösung dieser Aufgabe dürfen Sie die λ-Terme $< succ >, < pred >, < iszero >$, $< true >, < false >, < ite >, < add >, < mult >, < mod >$ und $< n >$ mit $n \in I\!N$ als bekannt voraussetzen. Des Weiteren dürfen Sie bei der Lösung die folgenden Beziehungen benutzen:

$$< succ >< n > \Longrightarrow^* < n+1 > , \quad < pred >< n > \Longrightarrow^* < n-1 > \ \text{für } n > 0 \ ,$$

$$< add >< n1 >< n2 > \Longrightarrow^* < n1 + n2 > , \quad < mult >< n1 >< n2 > \Longrightarrow^* < n1 * n2 >$$

$$< mod >< n >< m > \Longrightarrow^* < z > \ \text{ wobei } \ 0 \leq z < m \ \text{ mit } \ z = n - i \cdot m, \ i \in I\!N$$

$$< ite > \ \ s \ \ s_1 \ \ s_2 \Longrightarrow^* \begin{cases} s_1 \ wenn \ s \Longrightarrow^* < true > \\ s_2 \ sonst \end{cases}$$

$$< iszero > \ \ s \Longrightarrow^* \begin{cases} < true > \ \ wenn \ s \Longrightarrow^* < 0 > \\ < false > \ \ sonst \end{cases}$$

$$< Y > = (\lambda h.((\lambda y.h(yy))(\lambda y.h(yy))))$$

2. Aufgabe: (AGS 11.64)

Berechnen Sie $< pred >< 0 >$, also den Vorgänger der λ-Repräsentation von 0.

[1] Zeilenumbruch, λ–Term erstreckt sich über 2 Zeilen.

3. Aufgabe: (Klausuraufgabe 02.2010)

(a) Gegeben sei folgender λ-Term:

$$(\lambda xy.y\ (\lambda x.x)\ x\ )(y\ (\lambda y.y))$$

Reduzieren Sie diesen Term bis seine Normalform erreicht ist. Schreiben Sie – bevor Sie einen Ableitungsschritt ausführen – für die relevanten (Teil-)Ausdrücke die Mengen der freien bzw. der gebundenen Vorkommen von Variablen auf.

(b) Gegeben sei der λ-Term:
$< G >= (\lambda fxyz. < ite > (< iszero > (< mult > x\ y))\ (< add > x\ z)$
$(f\ (< succ > x)\ (< pred > y)\ (< succ > z)))$

Berechnen Sie schrittweise die Normalform des Terms $< Y >< G >< 4 >< 1 >< 5 >$. Führen Sie im Rechenprozess zweckmäßige Abkürzungen der λ-Terme ein.

(c) Eine Funktion $f : I\!N \times I\!N^+ \to I\!N^+$ sei wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lcll} f(x,y) & = & y & \text{für} \quad x = 0 \\ f(x,y) & = & y * y & \text{für} \quad x = 1 \\ f(x,y) & = & 2 + f(x-1, y+1) * f(x-2, y) & \text{für} \quad x \geq 2 \end{array}$$

Geben Sie zur Funktion f den zugehörigen λ-Term $< F >$ an, so dass $< f >=< Y >< F >$ gilt.

Hinweis:
Bei der Lösung dieser Aufgabe dürfen Sie die λ-Terme $< succ >, < pred >, < iszero >,$ $< true >, < false >, < ite >, < add >, < mult >, < mod >$ und $< n >$ mit $n \in I\!N$ als bekannt voraussetzen. Des Weiteren dürfen Sie bei der Lösung die folgenden Beziehungen benutzen:

$$< succ >< n > \Longrightarrow^* < n+1 > , \quad < pred >< n > \Longrightarrow^* < n-1 > \ \text{für } n > 0 \ ,$$

$$< add >< n1 >< n2 > \Longrightarrow^* < n1 + n2 > , \quad < mult >< n1 >< n2 > \Longrightarrow^* < n1 * n2 >$$

$$< mod >< n >< m > \Longrightarrow^* < z > \ \text{ wobei } \ 0 \leq z < m \ \text{ mit } \ z = n - i \cdot m, \ i \in I\!N$$

$$< ite > \quad s \ s_1 \ s_2 \Longrightarrow^* \begin{cases} s_1 \ wenn \ s \Longrightarrow^* < true > \\ s_2 \ sonst \end{cases}$$

$$< iszero > \quad s \Longrightarrow^* \begin{cases} < true > \ wenn \ s \Longrightarrow^* < 0 > \\ < false > \ sonst \end{cases}$$

$$< Y > = (\lambda h.((\lambda y.h(yy))(\lambda y.h(yy))))$$

Zusatzaufgabe: (AGS 11.47*)

Listenpräsentation:
Die Liste $[A, B, C]$ wird repräsentiert durch $(\lambda f.fA(\lambda f.fB(\lambda f.fC\ \ nil)))$, abgekürzt durch: $\lambda((ABC))$.

Der Kopf der Liste sei definiert durch $< hd > \equiv (\lambda p.p(\lambda xy.x))$,

der Rest der Liste durch $< tl > \equiv (\lambda p.p(\lambda xy.y))$

sowie das Vorsetzen eines Elements vor eine Liste durch $< cons > \equiv (\lambda xy.(\lambda f.fxy))$.

Berechnen Sie mit diesen Vorgaben $(< cons > (< hd > \lambda((CDE)))(< tl > \lambda((ABC))))$ und vergleichen das Ergebnis mit Ihrer intuitiven Erwartung.