

Aufgabenblatt zur 5. Übung

Zeitraum: 17.05. bis 21.05.2010

1. Aufgabe: (Klausuraufgabe 02.2010)

Folgende Definitionen seien gegeben:

```
1  sum :: [Int] -> Int
2  sum []          = 0
3  sum (a:l)       = a + (sum l)
4
5  mix :: [Int] -> [Int] -> [Int]
6  mix [] []       = []
7  mix (a:l) (b:r) = (b-a) : (mix l r)
8
9  scale :: [Int] -> Int -> [Int]
10 scale [] i      = []
11 scale (a:l) i   = (a*i) : (scale l i)
```

Zeigen Sie für die oben aufgeführten Definitionen mit Hilfe der Induktion über Listen, dass die folgende Gleichung für alle Listen $l, r :: [\text{Int}]$ **gleicher Länge** und jede ganze Zahl $i :: \text{Int}$ erfüllt ist:

$$(\text{sum } l) - (i * \text{sum } r) = \text{sum } (\text{mix } (\text{scale } r \ i) \ l) .$$

Geben Sie bei Umformungen die jeweils benutzten Gesetzmäßigkeiten/Definitionen an.

2. Aufgabe: (AGS 11.33)

Folgende Definitionen seien gegeben:

```
data Tree = Leaf Int | Branch Int Tree Tree
```

```
1  prod :: [Int] -> Int
2  prod [] = 1
3  prod (a:xs) = a * (prod xs)

4  prodTree :: Tree -> Int
5  prodTree (Leaf x) = x
6  prodTree (Branch x y z) = x * (prodTree y) * (prodTree z)

7  collapse :: Tree -> [Int]
8  collapse (Leaf x) = [x]
9  collapse (Branch x y z) = (collapse y) ++ [x] ++ (collapse z)
```

Zeigen Sie unter Verwendung der oben aufgeführten Definitionen durch strukturelle Induktion die Gültigkeit der folgenden Gleichung:

```
prodTree t = prod (collapse t)
```

Gehen Sie davon aus, dass die Beziehung $\text{prod } (x ++ y) = (\text{prod } x) * (\text{prod } y)$ bereits bewiesen ist.

3. Aufgabe: (AGS 11.45*)

(a) Bestimmen Sie für jeden der folgenden λ -Terme t die Mengen $FV(t)$ und $GV(t)$:

- $(\lambda x.x y) (\lambda y.y)$
- $(\lambda x.(\lambda y.z (\lambda z.z (\lambda x.y))))$
- $(\lambda x.(\lambda y.x z (y z))) (\lambda x.y (\lambda y.y))$

(b) Reduzieren Sie die folgenden λ -Terme zu Normalformen. Schreiben Sie – bevor Sie einen Ableitungsschritt ausführen – für die relevanten (Teil-)Ausdrücke die Mengen der freien bzw. der gebundenen Vorkommen von Variablen auf.

- $(\lambda x.(\lambda y.x z (y z))) (\lambda x.y (\lambda y.y))$
- $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.z))) x (+ y 1)$
- $(\lambda x.(\lambda y.x (\lambda z.y z))) (((\lambda x.(\lambda y.y)) 8) (\lambda x.(\lambda y.y) x))$
- $(\lambda h.(\lambda x.h (x x))) (\lambda x.h (x x)) ((\lambda x.x) (+ 1 5))$
- $(\lambda f.(\lambda a.(\lambda b.f a b))) (\lambda x.(\lambda y.x))$

Zusatzaufgabe: (AGS 11.39*)

```
1 data Tree = Leaf Int | Branch Int Tree Tree
2 sumTree :: Tree -> Int
3 sumTree (Leaf i) = i
4 sumTree (Branch i t1 t2) = i + (sumTree t1) + (sumTree t2)
5 revTree :: Tree -> Tree
6 revTree (Leaf i) = Leaf i
7 revTree (Branch i t1 t2) = Branch i (revTree t2) (revTree t1)
8 overlay :: Tree -> Tree -> Tree
9 overlay (Leaf i1) (Leaf i2) = Leaf (i1+i2)
10 overlay (Branch i1 t11 t12) (Branch i2 t21 t22) =
    Branch (i1+i2) (overlay t11 t21) (overlay t12 t22)
```

Zeigen Sie unter Verwendung der oben aufgeführten Definitionen mit Hilfe der strukturellen Induktion die Gültigkeit der Gleichung

$\text{sumTree (overlay } t \ t) = 2 * (\text{sumTree (revTree } t))$ für jedes $t :: \text{Tree}$.

Geben Sie bei Umformungen die jeweils benutzten Gesetzmäßigkeiten / Definitionen an.