Lösung der Zusatzaufgabe (AGS 2.47)

Gegeben sei die EBNF-Definition $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$ mit $V = \{S, A\}$, $\Sigma = \{a\}$ und R:

$$S ::= \hat{[}\,\hat{(}AS\,\hat{|}\,a\hat{)}\,\hat{]}\,, \qquad A ::= \hat{(}AS\,\hat{|}\,aa\hat{)}\,.$$

Es wurde die folgende (korrekte) Vermutung aufgestellt: Für jedes $n \geq 1$ gilt $f^n(\perp) = f_n$, wobei

$$f_n = \begin{pmatrix} \{\varepsilon, a\} \cup \{a^i \mid 2 \leq i \leq 3 \cdot 2^{n-2}\} \\ \{aa\} \cup \{a^i \mid 2 \leq i \leq 3 \cdot 2^{n-2}\} \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \leftarrow S \\ \leftarrow A \end{matrix}$$

die explizite Abbildungsvorschrift, f der Fixpunktoperator und $\perp = \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix}$ ist.

(a) Welche Sprache wird von der EBNF-Definition $\mathcal{E}$ beschrieben?

$$W(\mathcal{E}, S) = \{a^n \mid n \geq 0\} \text{ oder auch } \{a\}^*$$

(b) Geben Sie eine EBNF-Definition $\mathcal{E}'$ an, die dieselbe Sprache mit nur einer Regel beschreibt.

$$\mathcal{E}' = (\{S\}, \{a\}, S, \{S ::= \hat{\{}a\hat{\}}\})$$

(c) Wir wollen uns mittels vollständiger Induktion von der Korrektheit der aufgestellten Vermutung überzeugen. Der Induktionsanfang ($n = 1$) sei bereits gezeigt. Nun sei $n \geq 1$ und es gelte die Induktionshypothese $f^n(\perp) = f_n$. Zeigen Sie *schrittweise*, dass $f^{n+1}(\perp) = f_{n+1}$ gilt. Die Semantik der EBNF-Terme brauchen Sie dabei nicht schrittweise zu zeigen.

$$\begin{aligned}
f^{n+1}(\perp) &= f(f^n(\perp)) = f(f_n) \qquad\qquad \text{(Induktionshypothese)} \\
&= f(\begin{pmatrix} \{\varepsilon, a\} \cup \{a^i \mid 2 \leq i \leq 3 \cdot 2^{n-2}\} \\ \{aa\} \cup \{a^i \mid 2 \leq i \leq 3 \cdot 2^{n-2}\} \end{pmatrix}) \\
&= \begin{pmatrix} (\{aa\} \cup \{a^i \mid 2 \leq i \leq 3 \cdot 2^{n-2}\}) \cdot (\{\varepsilon, a\} \cup \{a^i \mid 2 \leq i \leq 3 \cdot 2^{n-2}\}) \cup \{\varepsilon, a\} \\ (\{aa\} \cup \{a^i \mid 2 \leq i \leq 3 \cdot 2^{n-2}\}) \cdot (\{\varepsilon, a\} \cup \{a^i \mid 2 \leq i \leq 3 \cdot 2^{n-2}\}) \cup \{aa\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \{a^{i+j} \mid 2 \leq i \leq 3 \cdot 2^{n-2}, 0 \leq j \leq 3 \cdot 2^{n-2}\} \cup \{\varepsilon, a\} \\ \{a^{i+j} \mid 2 \leq i \leq 3 \cdot 2^{n-2}, 0 \leq j \leq 3 \cdot 2^{n-2}\} \cup \{aa\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \{a^i \mid 2 \leq i \leq 2 \cdot 3 \cdot 2^{n-2}\} \cup \{\varepsilon, a\} \\ \{a^i \mid 2 \leq i \leq 2 \cdot 3 \cdot 2^{n-2}\} \cup \{aa\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \{a^i \mid 2 \leq i \leq 3 \cdot 2^{n-1}\} \cup \{\varepsilon, a\} \\ \{a^i \mid 2 \leq i \leq 3 \cdot 2^{n-1}\} \cup \{aa\} \end{pmatrix} \\
&= f_{n+1}
\end{aligned}$$