Aufgabenblatt zur 4. Übung

Zeitraum: 07.11. bis 11.11.2011

1. Aufgabe: (AGS 2.48)

(a) Geben Sie eine EBNF-Definition $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$ an, so dass gilt:

$$W(\mathcal{E}) = \{\mathtt{a}^{2k+l}\mathtt{c}^i\mathtt{b}\mathtt{d}^{2l+k+i} \mid i, k, l \geq 0\} .$$

(b) Sei $\mathcal{E}' = (V', \Sigma', S, R')$ mit $V' = \{S, A\}$, $\Sigma' = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ und R' enthält die beiden Regeln

$$S ::= (\mathtt{b}A|\mathtt{a}) , \qquad A ::= [\mathtt{b}S\mathtt{c}] .$$

Bestimmen Sie $W(\mathcal{E}', S)$.

(c) Zeigen Sie schrittweise unter Zuhilfenahme der semantischen Umformungsregeln von EBNF-Termen die Gültigkeit der folgenden Gleichung:

$$[\![\mathtt{a}\{\mathtt{b}\,\mathtt{a}\}]\!](\rho) = [\![\{\mathtt{a}\,\mathtt{b}\}\mathtt{a}]\!](\rho) \text{ für } \mathtt{a}, \mathtt{b} \in \Sigma .$$

Dabei dürfen Sie die Gleichung $\mathtt{a}(\mathtt{b}\,\mathtt{a})^i = (\mathtt{a}\,\mathtt{b})^i\mathtt{a}$ für jedes $i \geq 0$ benutzen.

2. Aufgabe: (AGS 2.40)

Sei $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$ mit $V = \{S, A\}$, $\Sigma = \{a\}$ und $R = \{\ S ::= A,\ \ A ::= (aS \mid a)\ \ \}$.

Zum Berechnen der syntaktischen Kategorien $W(\mathcal{E}, S)$ und $W(\mathcal{E}, A)$ mit Hilfe der Fixpunktsemantik sind folgende Schritte anzugeben:

(a) Führen Sie 5 Iterationsschritte aus und ermitteln Sie eine explizite Abbildungsvorschrift f_i für $f^i(\perp)$, $(i \geq 0)$.

(b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion über i, dass $f_i = f^i(\perp)$ für alle $i \geq 0$ gilt.

(c) Leiten Sie durch Grenzwertbestimmung $(i \to \infty)$ die gesuchten Sprachen ab.

3. Aufgabe: (AGS 3.4*)

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ ist der Binomialkoeffizient $b(n, k)$ definiert durch:

$$b(n, k) := \frac{n!}{k! * (n-k)!}$$

Schreiben Sie ein C–Programm, das Binomialkoeffizienten berechnet. Überlegen Sie sich Problemlösungen, die es erlauben, dass Ihr C–Programm möglichst große Zahleneingaben korrekt verarbeiten kann.

Zusatzaufgabe: (AGS 2.47)

Gegeben sei die EBNF-Definition $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$ mit $V = \{S, A\}$, $\Sigma = \{a\}$ und R:

$$S ::= \hat{[}\,\hat{(}AS\,\hat{|}\,a\hat{)}\,\hat{]}\,, \qquad A ::= \hat{(}AS\,\hat{|}\,aa\hat{)}\;.$$

(a) Welche Sprache wird von der EBNF-Definition $\mathcal{E}$ beschrieben?

(b) Geben Sie eine EBNF-Definition $\mathcal{E}'$ an, die dieselbe Sprache mit nur einer Regel beschreibt.

(c) Wir wollen uns mittels vollständiger Induktion von der Korrektheit der aufgestellten Vermutung überzeugen. Der Induktionsanfang ($n = 1$) sei bereits gezeigt. Nun sei $n \geq 1$ und es gelte die Induktionshypothese $f^n(\perp) = f_n$. Zeigen Sie *schrittweise*, dass $f^{n+1}(\perp) = f_{n+1}$ gilt. Die Semantik der EBNF-Terme brauchen Sie dabei nicht schrittweise zu zeigen.

$$\begin{aligned}
f^{n+1}(\perp) &= f(f^n(\perp)) = f(f_n) && \text{(Induktionshypothese)}\\
&= f(\begin{pmatrix} \{\varepsilon, a\} \cup \{a^i \mid 2 \leq i \leq 3 \cdot 2^{n-2}\} \\ \{aa\} \cup \{a^i \mid 2 \leq i \leq 3 \cdot 2^{n-2}\} \end{pmatrix})\\
&= \ldots
\end{aligned}$$