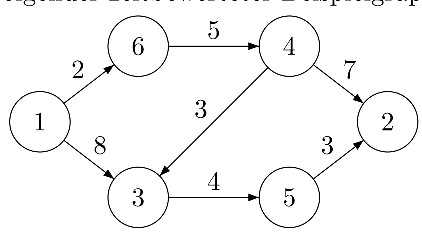
Aufgabenblatt zur 13. Übung

Zeitraum: 23.01. bis 27.01.2012

1. Aufgabe: (AGS 9.34*)

Zur Überwachung von Bauprojekten bedient man sich sehr häufig der Netzplantechnik. Die Knoten des (gerichteten) Netzplangraphen sind wichtige Ereignisse (Teilfertigstellungen, Beendigung von Planabschnitten bis hin zur Projektfertigstellung) im Prozess der Realisierung eines Projektes, die Kanten sind jeweils auszuführende Aktivitäten. Ein Ereignis kann nur dann eintreten, wenn alle notwendigen Aktivitäten, dargestellt durch die eingehenden Kanten, ausgeführt wurden. Ist ein Ereignis eingetreten, so werden alle nachfolgenden Aktivitäten, dargestellt durch die ausgehenden Kanten, in Gang gesetzt. Im einfachsten Fall sind nun ausschließlich die Kanten zeitbewertet (Zeitverbrauch bei Realisierung der Aktivität) und man interessiert sich für den Zeitabstand zwischen zwei Ereignissen. Im Besonderen kann damit die Dauer des Projektes, also der früheste Fertigstellungszeitpunkt berechnet werden.
Folgender zeitbewerteter Beispielgraph G sei nun gegeben:



(a) Geben Sie einen geeigneten Semiring für die Lösung dieses Problems an.
(b) Sei Knoten 1 der Startknoten (Projektbeginn) und Knoten 2 der Zielknoten (Projektabschluss); berechnen Sie mithilfe des Aho-Algorithmus die Dauer bis zum Projektabschluss. Geben Sie zunächst die modifizierte Adjazenzmatrix mA_G an.
(c) Welche Aktivitäten sind zeitunkritisch? Geben Sie für diese Aktivitäten die jeweiligen Zeitpuffer an, die keine Verlängerung der Projektdauer bewirken.

2. Aufgabe: (AGS 10.1)

(a) Beschreiben Sie die folgenden Zufallsexperimente formal durch Angabe einer Ergebnismenge und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung:

- Das Werfen von zwei fairen Würfeln.
- Das gleichzeitige Ziehen von jeweils einer Kugel aus zwei Urnen. Die erste Urne hat zwei weiße und drei schwarze Kugeln. Die zweite Urne hat eine rote, zwei blaue Kugeln und drei grüne Kugeln. Die Kugeln sind nicht unterscheidbar (abgesehen von ihrer Farbe).
- Das sechsmalige Werfen einer Münze, die mit Wahrscheinlichkeit 0,3 Kopf ergibt.

(b) Geben Sie für die folgenden Szenarien jeweils die Ergebnismenge und das Wahrscheinlichkeitsmodell an. Bestimmen Sie ob das Wahrscheinlichkeitsmodell beschränkt oder unbeschränkt ist. Wenn das Modell beschränkt ist, dann geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung an, die sich nicht in dem Modell befindet.

- Das Werfen eines Tetraeders mit beliebigen Eigenschaften.

- Das Werfen eines Würfels, bei dem alle Seiten mit gerader Augenzahl die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.
- Das zweimalige Werfen derselben Münze, diese darf beliebige Eigenschaften haben.

(c) Seien zwei Münzen mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1(K) = 0,7$ und $p_2(K) = 0,5$ gegeben. Bei einem Spiel können Sie sich eine der beiden Münzen wählen, diese fünf Mal werfen und erhalten einen Preis, wenn sie abwechselnd Kopf und Zahl werfen (beginnend mit Kopf). Welche der beiden Münzen würden Sie wählen?
Wenn Sie bei diesem Spiel unter allen möglichen Münzen wählen könnten, für welche würden Sie sich entscheiden?

3. Aufgabe: (AGS 10.4)
(a) Sie haben drei Münzen mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_1, p_2 und p_3:

$$p_1(K) = 0.5 , \quad p_2(K) = 0.3 , \quad p_3(K) = 0.6 ,$$
$$p_1(Z) = 0.5 , \quad p_2(Z) = 0.7 , \quad p_3(Z) = 0.4 .$$

Sie wählen zwei der Münzen aus und erzeugen durch sechzehnmaliges Werfen den folgenden Korpus:

$$h(K, K) = 2 , \quad h(K, Z) = 4 , \quad h(Z, K) = 4 , \quad h(Z, Z) = 6 .$$

Welche zwei Münzen haben Sie wahrscheinlich gegriffen?

(b) Nehmen Sie an, dass Sie mit zwei beliebigen Münzen den Korpus h erzeugt haben. Bestimmen Sie das Wahrscheinlichkeitsmodell und schätzen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der beiden Münzen.

4. Aufgabe: (AGS 10.6)
(a) Sie haben drei Münzen mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_1, p_2 und p_3:

$$p_1(K) = 0.5 , \quad p_2(K) = 0.3 , \quad p_3(K) = 0.6 ,$$
$$p_1(Z) = 0.5 , \quad p_2(Z) = 0.7 , \quad p_3(Z) = 0.4 .$$

Sie wählen zwei der Münzen, werfen diese fünf Mal und beobachten, dass die beiden Münzen genau zwei Mal auf der gleichen Seite liegen und drei Mal auf unterschiedlichen Seiten, sie haben also den folgenden Korpus mit unvollständigen Daten erzeugt:

$$h(=) = 2 , \quad h(\neq) = 3 .$$

Wobei "=" die Beobachtung ist, dass beide Münzen auf der gleichen Seite liegen (und entsprechend "$\neq$"). Welche beiden Münzen haben Sie wahrscheinlich gegriffen?

(b) Nehmen Sie nun an, Sie haben zwei beliebige Münzen fünf Mal geworfen und beobachtet, dass die beiden Münzen genau zwei Mal auf der gleichen Seite liegen und drei Mal auf unterschiedlichen Seiten. Überprüfen Sie, welche der folgenden statistischen Analysatoren d_1, d_2 und d_3 konsistent sind.

$$d_1(K, K) = 1/2 , \quad d_1(K, Z) = 1/2 , \quad d_1(Z, K) = 1/2 , \quad d_1(Z, Z) = 1/2 ,$$
$$d_2(K, K) = 1/3 , \quad d_2(K, Z) = 1/9 , \quad d_2(Z, K) = 8/9 , \quad d_2(Z, Z) = 2/3 ,$$
$$d_3(K, K) = 1/4 , \quad d_3(K, Z) = 3/4 , \quad d_3(Z, K) = 1/4 , \quad d_3(Z, Z) = 3/4 .$$

Zusatzaufgabe 1: (AGS 10.2*)
(a) Beschreiben Sie die folgenden Zufallsexperimente formal durch Angabe einer Ergebnismenge und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung:

- Das Werfen eines fairen Würfels.

- Das gleichzeitige Werfen der beiden Münzen A und B, wobei die Münzen A bzw. B mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,3$ bzw. $0,6$ Kopf ergeben.
- Das gleichzeitige Werfen der beiden Münzen A und C, wobei die Münze C mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,2$ Kopf ergibt.
- Das Werfen der Münze A und anschließendes Werfen der Münze B (wenn A Kopf ergeben hat) oder C (wenn A Zahl ergeben hat).
- Das Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit (i) zwei weißen und drei schwarzen Kugeln, (ii) einer weißen und drei schwarzen Kugeln bzw. (iii) zwei weißen und zwei schwarzen Kugeln. Die Kugeln sind nicht unterscheidbar (abgesehen von ihrer Farbe).
- Das Ziehen einer Kugel aus Urne (i) und das anschließende Ziehen aus Urne (ii). Das Ziehen einer Kugel aus Urne (i) und das anschließende Ziehen aus Urne (iii).
- Das zweimalige Ziehen einer Kugeln aus einer Urne mit zwei weißen und drei schwarzen Kugeln. Das Ziehen soll ohne Zurücklegen erfolgen. Tip: Nutzen Sie Ihr Wissen aus bisherigen Aufgabenteilen und gehen Sie ähnlich wie bei diesen Aufgabenteilen vor.
- Das Ziehen von Kugeln aus einer Urne mit zwei weißen und drei schwarzen Kugeln, bis man das erste Mal eine schwarze Kugel zieht.

(b) Geben Sie für die folgenden Szenarien jeweils die Ergebnismenge und das Wahrscheinlichkeitsmodell an. Bestimmen Sie ob das Wahrscheinlichkeitsmodell beschränkt oder unbeschränkt ist. Wenn das Modell beschränkt ist, dann geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung an, die sich nicht in dem Modell befindet.

- Das Werfen zweier Tetraeder mit beliebigen Eigenschaften.
- Das Werfen einer Münze und ein anschließendes Werfen einer zweiten Münze, wenn die erste Münze Kopf zeigt. Die beiden Münzen können beliebige Eigenschaften haben.
- Das Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit endlich vielen weißen und schwarzen Kugeln. Die Kugeln sind nicht unterscheidbar (abgesehen von ihrer Farbe).

(c) Gegeben sind drei Urnen A, B und C mit jeweils A) 10 roten, 30 weißen und 60 schwarzen Kugeln, B) 20 roten, 50 weißen und 30 schwarzen Kugeln und C) 40 roten, 30 weißen und 30 schwarzen Kugeln.

- Sie wählen eine der Urnen und ziehen fünf Mal eine Kugel mit Zurücklegen. Dabei ziehen Sie eine rote, zwei weiße und zwei schwarze Kugeln. Welche Urne haben Sie schätzungsweise gewählt?
- Nehmen Sie an, Sie wissen von der Urne, aus der Sie die Kugeln gezogen haben, nur, dass sie 100 Kugeln enthält. Benutzen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzung, um zu bestimmen, welche Kugeln die Urne enthält.

Zusatzaufgabe 2: (AGS 10.7*)
Bei beschränkten Modellen kann der Maximum-Likelihood-Schätzer im Allgemeinen nicht effizient bestimmt werden. Beinhaltet das Modell $\mathcal{M}$ aber die relative Häufigkeitsverteilung $\mathrm{rfe}(h)$ des gegebenen Korpus h, dann ist $\mathrm{mle}(\mathcal{M}, h) = \mathrm{rfe}(h)$, denn keine andere Wahrscheinlichkeitsverteilung erzeugt eine höhere Likelihood.
Bestimmen Sie für die folgenden Situationen das Wahrscheinlichkeitsmodell, zeigen Sie dass die relative Häufigkeitsverteilung des betrachteten Korpus in diesem enthalten ist und bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer.
(a) Werfen eines Würfels, bei dem gegenüberliegende Seiten die gleiche Wahrscheinlichkeit aufweisen. Betrachten Sie den folgenden Korpus:

$$h(1) = 3\,, \qquad h(2) = 5\,, \qquad h(3) = 1\,, \qquad h(4) = 1\,. \qquad h(5) = 5\,, \qquad h(6) = 3\,.$$

(b) Werfen zweier unabhängiger Münzen. Betrachten Sie den folgenden Korpus:

$$h(K,K) = 2\ , \qquad h(K,Z) = 4\ , \qquad h(Z,K) = 4\ , \qquad h(Z,Z) = 8\ .$$

(c) Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit fünf Kugeln. Die Kugeln sind weiß, schwarz oder rot. Betrachten Sie den folgenden Korpus:

$$h(W) = 4\ , \qquad h(S) = 2\ , \qquad h(R) = 4\ .$$

Zusatzaufgabe 3: (AGS 10.8*)
Bestimmen Sie für jedes der folgenden Zufallsexperimente und dem zugehörigen Korpus den Maximum-Likelihood-Schätzer.
(a) Werfen einer Münze und eines davon unabhängigen Tetraeders mit dem folgenden Korpus:

$$\begin{array}{cccc} h(K,1) = 4\ , & h(K,2) = 1\ , & h(K,3) = 5\ , & h(K,4) = 3\ , \\ h(Z,1) = 2\ , & h(Z,2) = 2\ , & h(Z,3) = 0\ , & h(Z,4) = 3\ . \end{array}$$

(b) Werfen von drei unabhängigen Münzen mit dem folgenden Korpus:

$$\begin{array}{cccc} h(K,K,K) = 1\ , & h(K,K,Z) = 7\ , & h(K,Z,K) = 1\ , & h(K,Z,Z) = 3\ , \\ h(Z,K,K) = 5\ , & h(Z,K,Z) = 3\ , & h(Z,Z,K) = 2\ , & h(Z,Z,Z) = 5\ . \end{array}$$