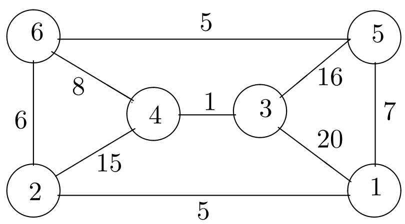
LV "Algorithmen und Datenstrukturen"
Prof. Dr. H. Vogler / Dipl.-Math. R. Vater

WS 11/12

Aufgabenblatt zur 12. Übung

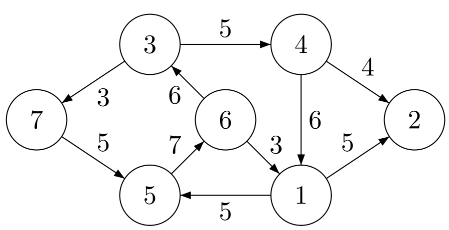
Zeitraum: 16.01. bis 20.01.2012

1. Aufgabe: (AGS 9.43*)
Der kantenbewertete Graph G sei durch folgende graphische Darstellung gegeben:



(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus die minimalen Entfernungen vom Knoten mit der Nummer 4 zu allen erreichbaren Knoten. Protokollieren Sie schrittweise die aktuelle Randknotenmenge und den zugehörigen Auswahlknoten. Geben Sie abschließend für alle berechneten kürzesten Wege die jeweils zu durchlaufende Knotenfolge an.
(b) Ändern Sie möglichst wenige Bewertungen von G so ab, dass die minimale Entfernung vom Knoten 4 zum Knoten 1 genau 21 wird und der dabei zu durchlaufende Weg über den Knoten 5 führt. Alle weiteren minimalen Entfernungen vom Knoten 4 sollen erhalten bleiben. Geben Sie Ihre Änderungen in der Notation (i, j, c) = (Anfangsknoten, Endknoten, Entfernung) an.

2. Aufgabe: (AGS 9.19*)
Der Graph G stellt das Stollensystem in einem Bergwerk dar. Die Zahlen an den Kanten sind die Breiten der Stollen. Aus Sicherheitsgründen sind alle Stollen Einbahnstraßen. Nur über Knoten 7 kann das Stollensystem betreten und nur über Knoten 2 wieder verlassen werden.



(a) Es sollen nun die maximalen Breiten für Fahrzeuge berechnet werden, die zwischen beliebigen Knotenpaaren verkehren können. Um welches Pfadproblem handelt es sich? Geben Sie die modifizierte Adjanzenzmatrix mA_G an!
(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Aho-Algorithmus die Matrizen $D_G^{(i)}$ für $1 \leqslant i \leqslant 7$. Schreiben Sie hierbei (außer bei $D_G^{(0)}$ und D_G=$D_G^{(7)}$) jeweils nur die Matrixelemente auf, die sich gegenüber der vorherigen Matrix geändert haben, und nutzen Sie für die Notation die Form: $(i,\ j,\ k)$ mit i=Anfangsknoten, j=Endknoten, k=Kapazität.
(c) Der Stollengang zwischen 1 und 2 wird plötzlich unpassierbar. Wie verändert sich die Matrix D_G? Was für ein Problem ergibt sich für Fahrzeuge, die sich zu diesem Zeitpunkt bereits im Bergwerk befinden? Geben Sie zwei mögliche Lösungen an, um diese Situation zu beherrschen.

3. Aufgabe: (AGS 9.18 (a)-(c))
In einem Produktionssystem gibt es die Zustände (Knoten) 1 bis 5 und die im Folgenden gegebenen Zustandsübergänge (Prozesse):
$(1, 2, \{a\}), (2, 4, \{d\}), (2, 5, \{b\}), (3, 2, \{e\}), (5, 3, \{c\}), (4, 5, \{b\}), (4, 1, \{e\})$, wobei die Notation wie folgt zu lesen ist: (Startknoten, Zielknoten, zum Übergang nötiger Prozess).

(a) Geben Sie eine graphische Darstellung und einen geeigneten Semiring zu diesem Prozessgraphen an!
(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Aho-Algorithmus die Matrizen $D_G^{(0)}$, $D_G^{(1)}$ und $D_G^{(2)}$. Schreiben Sie hierbei (außer bei $D_G^{(0)}$) jeweils nur die Matrixelemente auf, die sich gegenüber der vorherigen Matrix geändert haben. Benutzen Sie die Notation: (i, j, k) mit i=Anfangsknoten, j=Endknoten, k= zum Übergang nötige Prozesse.
(c) Geben Sie die zweite Zeile der Matrix D_G an!

Zusatzaufgabe 1: (AGS 9.13*)
Ein reales Straßensystem soll durch einen ungerichteten Graphen G modelliert werden. Die Knoten sollen die Kreuzungen (Straßenverzweigungen) und die Kanten sollen die möglichen mit einer km-Angabe bewerteten Straßenverbindungen darstellen. Diese Abstraktion hat nun folgenden Graphen G ergeben:
$(1, 3, 6), (1, 5, 11), (1, 2, 3), (2, 3, 2), (2, 4, 2), (2, 5, 7), (4, 6, 3), (5, 6, 4), (4, 7, 7), (4, 5, 4)$,
wobei die Notation wie folgt zu lesen ist: (Knoten1, Knoten2, Entfernung).
(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Floyd-Warshall-Algorithmus die kürzesten Wege zwischen allen Kreuzungspaaren. Geben Sie zunächst die zugehörige Matrix mA_G sowie eine graphische Darstellung von G an und berechnen Sie dann schrittweise die Matrizen $D_G^{(k)}$, $(1 \leq k \leq 7)$.
(b) Die Kreuzung (Knoten) 4 wird für den Durchgangsverkehr gesperrt. Sie darf somit nur noch Anfangs- bzw. Endpunkt eines entsprechenden Straßenzuges sein.
Wie verändern sich die kürzesten Wege zwischen den Knotenpaaren? Geben Sie für die Berechnung dieser Wege einen modifizierten Floyd-Warshall-Algorithmus an.

Zusatzaufgabe 2: (AGS 9.30*)
Ein reales Straßensystem einer Kleinstadt, welche nur Einbahnstraßen besitzt, soll durch den Graphen G modelliert werden. Dabei sind die Knoten die Kreuzungen und die Kanten die Straßen. Die Kanten (Straßen) sind mit einer spezifischen Zuverlässigkeit (hier: Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrzeug diese Straße passieren kann, ohne in einen Stau zu geraten) bewertet (Unabhängigkeit ist gegeben). Das Straßensystem wird durch folgenden Graphen abstrahiert:
$(1; 3; 0, 9); (2; 3; 0, 8); (2; 4; 0, 6); (3; 4; 0, 9); (3; 5; 0, 7); (3; 6; 0, 6); (4; 6; 0, 6); (4; 5; 0, 9)$;
wobei für die Notation gilt: (Anfangsknoten; Endknoten; Zuverlässigkeit).
(a) Geben Sie eine graphische Darstellung des Zuverlässigkeitsgraphen G sowie den Semiring des Zuverlässigkeitsproblems an!
(b) Berechnen Sie mit dem Aho-Algorithmus die Zuverlässigkeitsmatrix D_G. Zwischenergebnisse brauchen Sie nicht anzugeben.
(c) Warum stehen in der unteren Dreiecksmatrix von D_G nur Nullen?
(d) Da das Straßensystem völlig überlastet ist, möchte die Kleinstadt eine Umgehungsstraße errichten, deren Stauwahrscheinlichkeit gleich 0 ist. Da der Stadt aber Geld fehlt, kann sie nur eine einzige Direktverbindung zwischen einer der Stadtzufahrten (Knoten 1 oder 2) und einer der Ausfahrten (Knoten 5 oder 6) errichten. Welche der vier Möglichkeiten bringt den Autofahrern den größten Gewinn? Begründen Sie Ihre Aussage.