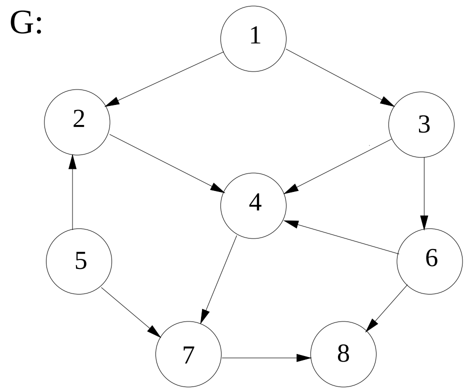
LV "Algorithmen und Datenstrukturen"
Prof. Dr. H. Vogler / Dipl.-Math. R. Vater

WS 10/11

Aufgabenblatt zur 13. Übung

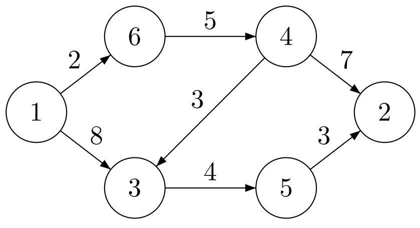
Zeitraum: 24.01. bis 28.01.2011

1. Aufgabe: (AGS 9.5)
Der kantenbewertete gerichtete Graph $G = (V, E)$ sei durch folgende Darstellung gegeben:



(a) Wenden Sie auf den Graphen G den DFS-Algorithmus mit dem Startknoten 1 an, und bestimmen Sie auf diese Weise einen depth first forest. Geben Sie mindestens drei unterschiedliche Lösungen an. Zwischenschritte zu den Lösungen brauchen Sie nicht anzugeben.
(b) Transformieren Sie G in den ungerichteten Graphen $G' = (V', E')$, indem Sie $V' = V$ setzen und E' nach der Vorschrift $E' = E \cup \{(j, i) \mid (i, j) \in E\}$ erzeugen.
Wenden Sie nun auf G' den BFS-Algorithmus mit dem Startknoten 5 an, und bestimmen Sie einen breadth first tree. Geben Sie auch hier mindestens drei unterschiedliche Lösungen an. Zwischenschritte zu den Lösungen brauchen Sie nicht anzugeben.
ACHTUNG! Ausschließliches Vertauschen von Ästen der Lösungsbäume wird hier nicht als weitere Lösung gezählt!

2. Aufgabe: (AGS 9.34*)
Zur Überwachung von Bauprojekten bedient man sich sehr häufig der Netzplantechnik. Die Knoten des (gerichteten) Netzplangraphen sind wichtige Ereignisse (Teilfertigstellungen, Beendigung von Planabschnitten bis hin zur Projektfertigstellung) im Prozess der Realisierung eines Projektes, die Kanten sind jeweils auszuführende Aktivitäten. Ein Ereignis kann nur dann eintreten, wenn alle notwendigen Aktivitäten, dargestellt durch die eingehenden Kanten, ausgeführt wurden. Ist ein Ereignis eingetreten, so werden alle nachfolgenden Aktivitäten, dargestellt durch die ausgehenden Kanten, in Gang gesetzt. Im einfachsten Fall sind nun ausschließlich die Kanten zeitbewertet (Zeitverbrauch bei Realisierung der Aktivität) und man interessiert sich für den Zeitabstand zwischen zwei Ereignissen. Im Besonderen kann damit die Dauer des Projektes, also der früheste Fertigstellungszeitpunkt berechnet werden.
Folgender zeitbewerteter Beispielgraph G sei nun gegeben:



(a) Geben Sie einen geeigneten Semiring für die Lösung dieses Problems an.
(b) Sei Knoten 1 der Startknoten (Projektbeginn) und Knoten 2 der Zielknoten (Projektabschluss); berechnen Sie mithilfe des Aho-Algorithmus die Dauer bis zum Projektabschluss. Geben Sie zunächst die modifizierte Adjazenzmatrix mA_G an.
(c) Welche Aktivitäten sind zeitunkritisch? Geben Sie für diese Aktivitäten die jeweiligen Zeitpuffer an, die keine Verlängerung der Projektdauer bewirken.

3. Aufgabe: (AGS 9.30*)
Ein reales Straßensystem einer Kleinstadt, welche nur Einbahnstraßen besitzt, soll durch den Graphen G modelliert werden. Dabei sind die Knoten die Kreuzungen und die Kanten die Straßen. Die Kanten (Straßen) sind mit einer spezifischen Zuverlässigkeit (hier: Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrzeug diese Straße passieren kann, ohne in einen Stau zu geraten) bewertet (Unabhängigkeit ist gegeben). Das Straßensystem wird durch folgenden Graphen abstrahiert:
$(1;3;0,9);(2;3;0,8);(2;4;0,6);(3;4;0,9);(3;5;0,7);(3;6;0,6);(4;6;0,6);(4;5;0,9);$
wobei für die Notation gilt: (Anfangsknoten; Endknoten; Zuverlässigkeit).
(a) Geben Sie eine graphische Darstellung des Zuverlässigkeitsgraphen G sowie den Semiring des Zuverlässigkeitsproblems an!
(b) Berechnen Sie mit dem Aho-Algorithmus die Zuverlässigkeitsmatrix D_G. Zwischenergebnisse brauchen Sie nicht anzugeben.
(c) Warum stehen in der unteren Dreiecksmatrix von D_G nur Nullen?
(d) Da das Straßensystem völlig überlastet ist, möchte die Kleinstadt eine Umgehungsstraße errichten, deren Stauwahrscheinlichkeit gleich 0 ist. Da der Stadt aber Geld fehlt, kann sie nur eine einzige Direktverbindung zwischen einer der Stadtzufahrten (Knoten 1 oder 2) und einer der Ausfahrten (Knoten 5 oder 6) errichten. Welche der vier Möglichkeiten bringt den Autofahrern den größten Gewinn? Begründen Sie Ihre Aussage.

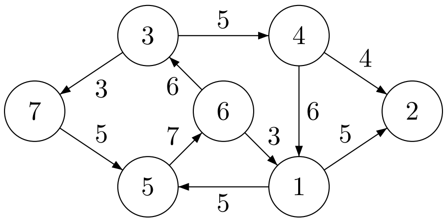
4. Aufgabe: (AGS 9.18)
In einem Produktionssystem gibt es die Zustände (Knoten) 1 bis 5 und die im Folgenden gegebenen Zustandsübergänge (Prozesse):
$(1,2,\{a\}),(2,4,\{d\}),(2,5,\{b\}),(3,2,\{e\}),(5,3,\{c\}),(4,5,\{b\}),(4,1,\{e\})$, wobei die Notation wie folgt zu lesen ist: (Startknoten, Zielknoten, zum Übergang nötiger Prozess).

(a) Geben Sie eine graphische Darstellung und einen geeigneten Semiring zu diesem Prozessgraphen an!
(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Aho-Algorithmus die Matrizen $D_G^{(0)}$, $D_G^{(1)}$ und $D_G^{(2)}$. Schreiben Sie hierbei (außer bei $D_G^{(0)}$) jeweils nur die Matrixelemente auf, die sich gegenüber der vorherigen Matrix geändert haben. Benutzen Sie die Notation: (i,j,k) mit i=Anfangsknoten, j=Endknoten, k= zum Übergang nötige Prozesse.
(c) Geben Sie die zweite Zeile der Matrix D_G an!

Zusatzaufgabe 1: (AGS 9.13*)
Ein reales Straßensystem soll durch einen ungerichteten Graphen G modelliert werden. Die Knoten sollen die Kreuzungen (Straßenverzweigungen) und die Kanten sollen die möglichen mit einer km-Angabe bewerteten Straßenverbindungen darstellen. Diese Abstraktion hat nun folgenden Graphen ergeben:
$(1,3,6),(1,5,11),(1,2,3),(2,3,2),(2,4,2),(2,5,7),(4,6,3),(5,6,4),(4,7,7),(4,5,4),$
wobei die Notation wie folgt zu lesen ist: (Knoten1, Knoten2, Entfernung).

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Floyd-Warshall-Algorithmus die kürzesten Wege zwischen allen Kreuzungspaaren. Geben Sie zunächst die Matrix $D_G^{(0)}$ sowie eine graphische Darstellung von G an und berechnen Sie dann schrittweise die Entfernungsmatrizen $D_G^{(k)}$, $(1 \leq k \leq 7)$.
(b) Die Kreuzung (Knoten) 4 wird für den Durchgangsverkehr gesperrt. Sie darf somit nur noch Anfangs- bzw. Endpunkt eines entsprechenden Straßenzuges sein.
Wie verändern sich die kürzesten Wege zwischen den Knotenpaaren? Geben Sie für die Berechnung dieser Wege einen modifizierten Floyd-Warshall-Algorithmus an.

Zusatzaufgabe 2: (AGS 9.19*)
Der Graph G stellt das Stollensystem in einem Bergwerk dar, die Knoten sind hierbei Verzweigungspunkte, die Kanten sind die Stollengänge. Die Zahlen an den Kanten sind die nutzbaren, jeweiligen Breiten der Stollen. Aus Sicherheitsgründen sind alle Stollengänge ausschließlich in der jeweils ausgewiesenen Richtung befahrbar. Nur über Knoten 7 kann das Stollensystem betreten werden; über Knoten 2 kann es wieder verlassen werden.



(a) Es sollen nun die maximalen Breiten für Fahrzeuge berechnet werden, die zwischen beliebigen Knotenpaaren verkehren können. Um welches Pfadproblem handelt es sich? Geben Sie die modifizierte Adjanzenzmatrix mA_G an!
(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Aho-Algorithmus die Matrizen $D_G^{(i)}$ für $1 \leqslant i \leqslant 7$. Schreiben Sie hierbei (außer bei $D_G^{(0)}$ und $D_G = D_G^{(7)}$ jeweils nur die Matrixelemente auf, die sich zur vorherigen Matrix geändert haben. Benutzen Sie die Notation: (i, j, k) mit i=Anfangsknoten, j=Endknoten, k=Kapazität.
(c) Der Stollengang zwischen 1 und 2 wird plötzlich unpassierbar. Wie verändert sich die Matrix D_G? Was für ein Problem ergibt sich für Fahrzeuge, die sich zu diesem Zeitpunkt bereits im Bergwerk befinden? Geben Sie zwei mögliche Lösungen an, um diese Situation zu beherrschen.