LV "Algorithmen und Datenstrukturen"
Dr. D. Habich / Dipl.-Math. R. Vater

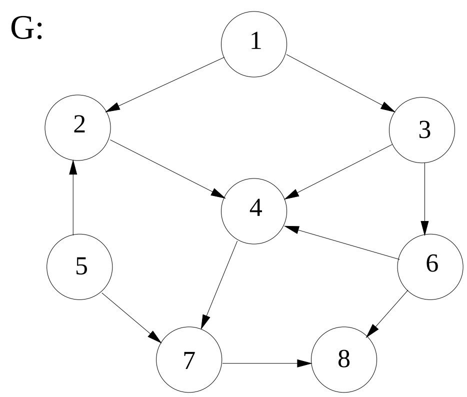
WS 09/10

Aufgabenblatt zur 13. Übung

Zeitraum: 25.01. bis 29.01.2010

Bitte beachten Sie, dass die 13. Vorlesung am Freitag, dem 29.01.10, in der 1. DS und im Hörsaal TRE/PHY stattfindet.

1. Aufgabe: (AGS 9.5)
Der kantenbewertete gerichtete Graph $G = (V, E)$ sei durch folgende Darstellung gegeben:



(a) Wenden Sie auf den Graphen G den DFS-Algorithmus mit dem Startknoten 1 an, und bestimmen Sie auf diese Weise einen depth first forest. Geben Sie mindestens drei unterschiedliche Lösungen an. Zwischenschritte zu den Lösungen brauchen Sie nicht anzugeben.
(b) Transformieren Sie G in den ungerichteten Graphen $G' = (V', E')$, indem Sie $V' = V$ setzen und E' nach der Vorschrift $E' = E \cup \{(j, i) \mid (i, j) \in E\}$ erzeugen.
Wenden Sie nun auf G' den BFS-Algorithmus mit dem Startknoten 5 an, und bestimmen Sie einen breadth first tree. Geben Sie auch hier mindestens drei unterschiedliche Lösungen an. Zwischenschritte zu den Lösungen brauchen Sie nicht anzugeben.
ACHTUNG! Ausschließliches Vertauschen von Ästen der Lösungsbäume wird hier nicht als weitere Lösung gezählt!

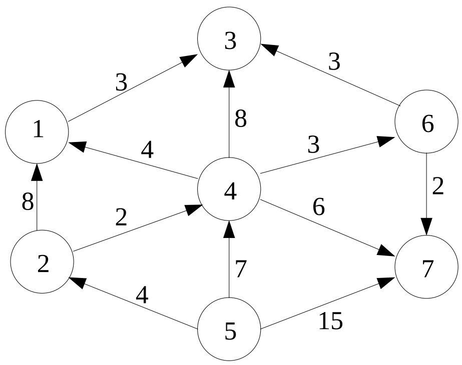
2. Aufgabe: (AGS 9.44)
Gegeben sei der gerichtete Distanzgraph $G = (V, E, c)$ mit der Knotenmenge $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, der Kantenmenge $E = \{(1, 3), (1, 6), (2, 1), (2, 5), (2, 4), (4, 3), (4, 6), (5, 1), (5, 4), (5, 6), (6, 3)\}$ und der Bewertungsfunktion $c : E \longrightarrow \mathbb{R}$

(i, j)	$(1,3)$	$(1,6)$	$(2,1)$	$(2,5)$	$(2,4)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,4)$	$(5,6)$	$(6,3)$
$c(i, j)$	5	2	8	3	9	2	4	4	5	10	2

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus die minimalen Entfernungen vom Knoten mit der Nummer 2 zu allen erreichbaren Knoten. Protokollieren Sie schrittweise jeweils die aktuelle Randknotenmenge und den zugehörigen Auswahlknoten. Geben Sie abschließend für alle berechneten kürzesten Wege die jeweils zu durchlaufende Knotenfolge an.

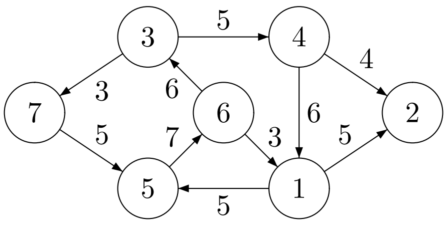
(b) Stellen Sie den gerichteten Graphen G graphisch dar. In diesen Graphen zeichnen Sie nun die im Teil (a) dieser Aufgabenstellung berechneten kürzesten gerichteten Wege vom Startknoten 2 ein. Dieser Teilgraph ist ein Baum; er heißt *spannender Baum* der kürzesten Wege von G mit der Wurzel 2.
Transformieren Sie nun $G = (V, E, c)$ in den transponierten Graphen $G^T = (V, E^T, c^T)$, wobei $E^T = \{(j, i) \mid (i, j) \in E\}$ und $c^T(j, i) = c(i, j)$.
Zeichnen Sie den spannenden Baum der kürzesten Wege von G^T mit der Wurzel 3.

3. Aufgabe: (AGS 9.14)
Der kantenbewertete Graph $G = (V, E)$ sei durch folgende graphische Darstellung gegeben:



(a) Geben Sie für G die modifizierte Adjazenzmatrix mA_G an.
(b) Geben Sie für den Floyd-Warshall-Algorithmus die Matrix $D_G^{(2)}$ an. Schreiben Sie hierbei nur die Matrixelemente auf, die sich gegenüber mA_G geändert haben und benutzen Sie dafür die Notation: (i, j, k) mit i = Anfangsknoten, j = Endknoten, k = Entfernung. Zwischenschritte bei der Berechnung von $D_G^{(2)}$ brauchen Sie nicht anzugeben.
(c) Welche Matrizen $D_G^{(k)}$, $k > 2$, können in unserem Beispiel nur zu einer Verbesserung der minimalen Entfernungen führen? Begründen Sie Ihre Aussage!
(d) Geben Sie die kürzeste-Wege-Matrix D_G mithilfe des Floyd-Warshall-Algorithmus an. Zwischenschritte bei der Berechnung brauchen Sie nicht anzugeben.

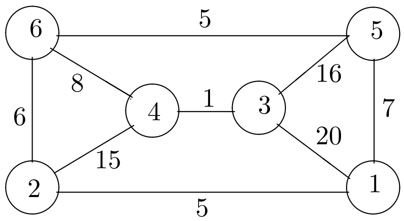
4. Aufgabe: (AGS 9.18*)
Der Graph G stellt das Stollensystem in einem Bergwerk dar, die Knoten sind hierbei Verzweigungspunkte, die Kanten sind die Stollengänge. Die Zahlen an den Kanten sind die nutzbaren, jeweiligen Breiten der Stollen. Aus Sicherheitsgründen sind alle Stollengänge ausschließlich in der jeweils ausgewiesenen Richtung befahrbar. Nur über Knoten 7 kann das Stollensystem betreten werden; über Knoten 2 kann es wieder verlassen werden.



(a) Es sollen nun die maximalen Breiten für Fahrzeuge berechnet werden, die zwischen beliebigen Knotenpaaren verkehren können. Um welches Pfadproblem handelt es sich? Geben Sie die modifizierte Adjanzenzmatrix mA_G an!
(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Aho-Algorithmus die Matrizen $D_G^{(i)}$ für $0 \leqslant i \leqslant 7$. Schreiben Sie hierbei (außer bei $D_G^{(0)}$ und $D_G = D_G^{(7)}$) jeweils nur die Matrixelemente

auf, die sich gegenüber der vorherigen Matrix geändert haben, und benutzen Sie dafür die Notation $(i,\ j,\ k)$ mit $i =$ Anfangsknoten, $j =$ Endknoten, $k =$ Kapazität.
(c) Der Stollengang zwischen 1 und 2 wird plötzlich unpassierbar. Wie verändert sich die Matrix D_G? Was für ein Problem ergibt sich für Fahrzeuge, die sich zu diesem Zeitpunkt bereits im Bergwerk befinden? Was könnte man tun, um diese Situation zu entschärfen. Geben Sie zwei mögliche Lösungen an.

Zusatzaufgabe 1: (AGS 9.39*)
Der kantenbewertete Graph G sei durch folgende graphische Darstellung gegeben:



(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus die minimalen Entfernungen vom Knoten mit der Nummer 4 zu allen erreichbaren Knoten. Protokollieren Sie schrittweise die aktuelle Randknotenmenge und den zugehörigen Auswahlknoten. Geben Sie abschließend für alle berechneten kürzesten Wege die jeweils zu durchlaufende Knotenfolge an.
(b) Ändern Sie möglichst wenige Bewertungen von G so ab, dass die minimale Entfernung vom Knoten 4 zum Knoten 1 genau 21 wird und der dabei zu durchlaufende Weg über den Knoten 5 führt. Alle weiteren minimalen Entfernungen vom Knoten 4 sollen erhalten bleiben. Geben Sie Ihre Änderungen in der Notation $(i, j, c) =$ (Anfangsknoten, Endknoten, Entfernung) an.

Zusatzaufgabe 2: (AGS 9.12*)
Ein reales Straßensystem soll durch einen ungerichteten Graphen G modelliert werden. Die Knoten sollen die Kreuzungen (Straßenverzweigungen) und die Kanten sollen die möglichen mit einer km-Angabe bewerteten Straßenverbindungen darstellen. Diese Abstraktion hat nun folgenden Graphen G ergeben:
$(1, 3, 6), (1, 5, 11), (1, 2, 3), (2, 3, 2), (2, 4, 2), (2, 5, 7), (4, 6, 3), (5, 6, 4), (4, 7, 7), (4, 5, 4)$,
wobei die Notation wie folgt zu lesen ist: (Knoten1, Knoten2, Entfernung).
(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Floyd-Warshall-Algorithmus die kürzesten Wege zwischen allen Kreuzungspaaren. Geben Sie zunächst die zugehörige Matrix mA_G sowie eine graphische Darstellung von G an und berechnen Sie dann schrittweise die Matrizen $D_G^{(k)}$, $(1 \le k \le 7)$.
(b) Die Kreuzung (Knoten) 4 wird für den Durchgangsverkehr gesperrt. Sie darf somit nur noch Anfangs- bzw. Endpunkt eines entsprechenden Straßenzuges sein.
Wie verändern sich die kürzesten Wege zwischen den Knotenpaaren? Geben Sie für die Berechnung dieser Wege einen modifizierten Floyd-Warshall-Algorithmus an.